

Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências

Departamento de Estatística
e Investigação Operacional



Testes Não-Paramétricos para
Validação de Modelos Extremais

Paulo Jorge Dias dos Santos

Dissertação orientada por:

Prof. Doutora Maria Ivette Leal de Carvalho Gomes
Prof. Doutora Patrícia Cortés de Zea Bermudez

Mestrado em Estatística
2011

A meus pais

Resumo

Os testes não-paramétricos de ajustamento, de entre os quais destacamos os testes de Kolmogorov-Smirnov, de Stephens e de Cramér-von Mises são frequentemente usados em contexto paramétrico, com o objectivo de validar determinado modelo, como modelo subjacente aos dados. Os pontos críticos destes testes são facilmente acessíveis em tabelas, válidas quando não há necessidade de estimar parâmetros desconhecidos, uma situação totalmente irrealista na prática.

Em *Estatística de Extremos*, a sua aplicação à validação de *modelos extremais*, tais como os modelo de tipo *Pareto*, *generalizado de Pareto* e *generalizado de valores extremos* (ou casos particulares, como os modelos *Gumbel*, *Fréchet* e *Weibull*) tem-se revelado importante, sendo então necessário proceder previamente à estimação de parâmetros desconhecidos e à construção de tabelas de pontos críticos adequadas. Após um estudo genérico destes testes de ajustamento e sua distribuição de amostragem em contexto de população subjacente independente de parâmetros desconhecidos, procederemos à construção de tabelas de pontos críticos dos referidos testes, a serem usadas na validação de alguns dos modelos extremais referidos. Essas tabelas podem ser construídas através de simulações de Monte-Carlo, que serão delineadas em R.

Palavras chave: Testes não-paramétricos, Testes de ajustamento, Valores extremos, Estimadores de máxima verosimilhança, Pontos críticos.

Abstract

The nonparametric “goodness-of-fit” tests, among which we highlight the tests of Kolmogorov-Smirnov, Stephens and Cramér-von Mises are often used in a parametric framework, in order to validate a particular model as the one underlying the available data. The critical points of these tests are easily accessible in tables, which are valid when there is no need to estimate unknown parameters, a totally unrealistic situation in practice.

In *Statistics of Extremes*, its application to the validation of extremal models, such as *Pareto*, *generalized Pareto* and *generalized extreme value* (or particular cases, as the *Gumbel*, *Fréchet* and *Weibull*) models, possibly dependent on unknown location, scale and shape parameters, has proved to be an important area. It is then necessary to proceed to an *a priori* estimation of the unknown parameters, and to the construction of tables of appropriate critical points. After the study of the generic sampling behaviour of these goodness-of-fit test statistics, in the case that the underlying population is independent of unknown parameters, we will proceed to the construction of tables of critical points of these test statistics, to be used for the validation of some models, such as extremal models. These tables can be built through Monte-Carlo simulations, which will be outlined in R.

Keywords: Nonparametric tests, “Goodness-of-fit” tests, Extreme values, Maximum likelihood estimation, Critical points.

Agradecimentos

Agradeço ao Departamento de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa pelas condições necessárias para a realização do meu trabalho.

Às minhas orientadoras, Professora Doutora Maria Ivette Gomes pelo acompanhamento na parte teórica e Professora Doutora Patrícia de Zea Bermudez na parte relativa à simulação. A ambas quero ainda agradecer o apoio, a disponibilidade e a forma simultaneamente crítica e construtiva com que acompanharam a redação da minha tese.

Quero ainda agradecer ao meu colega, Rui Barradas, a deteção de algumas anomalias nos “scripts” utilizados, nomeadamente na parte da optimização.

Agradeço também à Professora Doutora Maria Ivette Gomes e à Professora Doutora Maria Lucília Carvalho pela disponibilização de alguns “templates” em “Latex”, para a elaboração desta dissertação.

E finalmente agradeço à minha família, amigos e colegas pelo apoio necessário e pelas palavras de apreço nas alturas indicadas.

Sem as pessoas atrás referidas tudo isto não seria possível.

A todos o meu obrigado.

Paulo Santos

“Torture numbers, and they’ll confess to anything.”

Gregg Easterbrook

“The death of one man is a tragedy. The death of millions is a statistic.”

Joe Stalin

“Statistics are like bikinis. What they reveal is suggestive, but what they conceal is vital.”

Aaron Levenstein

“The average human has one breast and one testicle.”

Des McHale

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Testes Não-Paramétricos de Ajustamento	3
2.1	Teste D_n de Kolmogorov-Smirnov	4
2.2	Teste W_n^2 de Cramér-von Mises	6
2.3	Teste U_n^2 de Stephens	10
3	Breve Referência à Teoria de Valores Extremos	17
3.1	O Teorema de Gnedenko	18
3.2	Comportamento Limite dos Excessos Acima de um Nível Elevado	23
4	Algumas Propriedades dos Modelos e Estimação de Parâmetros	25
4.1	Pareto Generalizada	25
4.1.1	Momentos da Distribuição Pareto Generalizada	26
4.1.2	Estimação dos Parâmetros Desconhecidos	32
4.2	Generalizada de Valores Extremos	39
4.2.1	Momentos da Distribuição Generalizada de Valores Extremos	39
4.2.2	Estimação dos Parâmetros Desconhecidos	46
5	Simulação de Pontos Críticos	55
5.1	Método dos Quantis	55
5.2	Técnica das Réplicas	58
5.3	Comparação dos Dois Métodos	59
A	Scripts	65
B	Tabelas	85
C	Bibliografia	95

Capítulo 1

Introdução

Esta tese incide essencialmente sobre testes não-paramétricos de ajustamento, de entre os quais destacamos os testes de Kolmogorov-Smirnov, de Stephens e de Cramér-von Mises, a serem estudados no Capítulo 2. Face a uma amostra aleatória de dimensão n , (X_1, X_2, \dots, X_n) , constituída por variáveis aleatórias (v.a.'s) independentes e idênticamente distribuídas (i.i.d.) provenientes de um modelo desconhecido F , denotemos por $(X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n})$ a amostra de estatísticas ordinais ascendentes associada à amostra (X_1, X_2, \dots, X_n) . Qualquer das estatísticas de teste atrás referidas são medidas de distância entre a função de distribuição (f.d.) teórica, F , e a f.d. empírica,

$$F_n^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I(x - X_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < X_{1:n}, \\ \frac{k}{n} & \text{se } X_{k:n} \leq x < X_{k+1:n}, \ 1 \leq k \leq n-1, \\ 1 & \text{se } x \geq X_{n:n}, \end{cases} \quad (1.1)$$

imagem estatística da f.d. $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, desconhecida, sendo

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0, \end{cases}$$

a função indicatriz. Na Secção 2.1 abordaremos o teste K_n de Kolmogorov-Smirnov, a medida mais simples de distância entre $F(x)$ e $F_n^*(x)$. A Secção 2.2 será dedicada ao teste W_n^2 de Cramér-von Mises, e finalmente a Secção 2.3 incidirá sobre o teste U_n^2 de Stephens.

No Capítulo 3, fazemos uma breve introdução a resultados limites em *Teoria de Valores Extremos* (TVE), referindo brevemente, na Secção 3.1, os possíveis comportamentos limite não degenerados da sucessão de máximos parciais $\{X_{n:n} := \max(X_1, X_2, \dots, X_n)\}_{n \geq 1}$. Essa distribuição limite não-degenerada é então do tipo da chamada distribuição de *Valores Extremos* (GEV, do Inglês *General Extreme Values*), com a forma funcional

$$G_\gamma(x) = \begin{cases} e^{-(1+\gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}}, \ 1 + \gamma x > 0 & \text{se } \gamma \neq 0 \\ e^{-e^{-x}}, \ x \in \mathbb{R} & \text{se } \gamma = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

onde $\gamma(\in \mathbb{R})$ é o chamado *índice de valores extremos*. Face ao facto de se ter

$$X_{1:n} := \min(X_1, X_2, \dots, X_n) = -\max(-X_1, -X_2, \dots, -X_n),$$

as possíveis distribuições limite para a sucessão de mínimos parciais, $\{X_{1:n} := \min(X_1, X_2, \dots, X_n)\}_{n \geq 1}$, são então do tipo,

$$G_\gamma^*(x) = 1 - G_\gamma(-x),$$

com $G_\gamma(x)$ definida em (1.2), i.e., têm a forma funcional

$$G_\gamma^*(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(1-\gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}}, & 1 - \gamma x > 0, \text{ se } \gamma \neq 0 \\ 1 - e^{-e^x}, & x \in \mathbb{R} \text{ se } \gamma = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

A Secção 3.2 é dedicada ao comportamento limite dos excessos acima de um nível elevado u , quando $u = u_n \rightarrow x^F$, quando $n \rightarrow \infty$, onde $x^F := \sup\{x : F(x) \leq 1\}$ designa o limite superior do suporte. Obtêm-se então distribuições do tipo da *generalizada de Pareto* (GP), com a forma funcional,

$$GP_\gamma(x) = 1 + \ln G_\gamma(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}, & 1 + \gamma x > 0, x > 0 \text{ se } \gamma \neq 0 \\ 1 - e^{-x}, & x > 0 \text{ se } \gamma = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

No Capítulo 4 iremos estudar, para as distribuições referidas em (1.2) e (1.4), os quatro primeiros momentos standardizados: média, variância, assimetria e achatamento. Vamos também proceder aos cálculos dos estimadores dos parâmetros, usando três técnicas: Método dos Momentos, Método dos Momentos Probabilisticamente Ponderados e o Método de Máxima Verosimilhança.

O Capítulo 5 trata de explicar a metodologia utilizada para o cálculo dos pontos críticos. No caso desta tese apenas iremos considerar dois métodos: o Método dos Quantis e a Técnica das Réplicas. Na Secção 5.3 iremos ainda fazer uma breve comparação destas duas alternativas para a estimação de quantis.

No Apêndice A, apresentaremos alguns Scripts que nos foram bastante úteis para a elaboração desta dissertação. Note-se que, em cada caso, apenas se apresenta o conteúdo da função. Isto é, vamos assumir que o leitor sabe invocar uma função já criada no R.

Por último o Apêndice B, irá conter as tabelas calculadas pelos métodos apresentados no Capítulo 5. Iremos apresentar as tabelas para os casos em que o parâmetro de forma é igual a 0.2, 0 e -0.2 , e faremos isto tanto para a GEV como para a GP.

Capítulo 2

Testes Não-Paramétricos de Ajustamento

Num teste de ajustamento pretende testar-se uma hipótese:

$$H_0 : X \text{ tem f.d. } F \quad \text{versus} \quad H_1 : X \text{ tem f.d. } G \in \mathcal{F} - F,$$

em que a família \mathcal{F} de funções de distribuição não é usualmente especificada.

O objectivo essencial, usualmente com o intuito de rejeitar um modelo como adequado, é encontrar uma estatística $T = T(X_1, \dots, X_n)$, cuja f.d. condicional a H_0 seja razoavelmente fácil de calcular e seja independente de H_0 , ou pelo menos assintoticamente independente de H_0 .

A potência de um teste de ajustamento é usualmente difícil de obter. Existe pois uma grande diversidade de testes de ajustamento, cuja potência depende fortemente do modelo F especificado em H_0 e do modelo G especificado na hipótese alternativa H_1 (testes de normalidade, exponencialidade, log-normalidade, e assim por diante, que não iremos abordar nesta tese).

No entanto os testes de ajustamento mais conhecidos e mais utilizados continuam a ser os testes em modelos não-paramétricos, dos quais realçamos o teste do qui-quadrado, medida de distância entre o estimador do histograma e a função densidade de probabilidade $f = F'$, desconhecida, e os testes D_n de Kolmogorov-Smirnov, W_n^2 de Cramér-von Mises e U_n^2 de Stephens, medidas de distância entre a f.d. F , desconhecida, e a f.d. empírica $F_n^*(x)$ associada à amostra em estudo, e definida em (1.1). É sobre este tipo de testes que nos iremos debruçar nas secções seguintes.

Na realidade, qualquer estatística da forma

$$\int_{\mathbb{R}} G(F_n^*(x), F(x)) \, dF(x),$$

tem, se F for contínua, f.d. independente de F , fornecendo pois um possível teste de ajustamento. De entre este tipo de testes são de destacar, pela sua potência face a uma grande diversidade de alternativas, os dois testes a estudar na Secção 2.2 e na Secção 2.3.

2.1 Teste D_n de Kolmogorov-Smirnov

Sendo $F_n^*(x)$, definida em (1.1), a f.d. empírica associada à amostra (X_1, \dots, X_n) , tem-se

$$F_n^*(x) \xrightarrow{a.s.} F(x),$$

condicionalmente à validade de $H_0 : X \sim F$. Tem pois sentido considerar uma medida de distância entre a f.d. empírica e a f.d. teórica. A estatística de Kolmogorov-Smirnov é dada por

$$D_n := \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n^*(x) - F(x)|, \quad (2.1)$$

que tem uma distribuição exacta independente de F , desde que F seja contínua, e não haja necessidade de estimar parâmetros desconhecidos. Essa distribuição exacta encontra-se convenientemente tabelada, para valores seleccionados de n e do nível de significância α a que se pretende formular o teste.

Como já foi mencionado anteriormente, quando a dimensão da amostra tende para infinito, a função de distribuição empírica converge quase certamente para a função de distribuição associada à população subjacente à amostra. Assim espera-se que o comportamento das duas funções em cada observação amostral seja parecido ao da Figura 2.1.

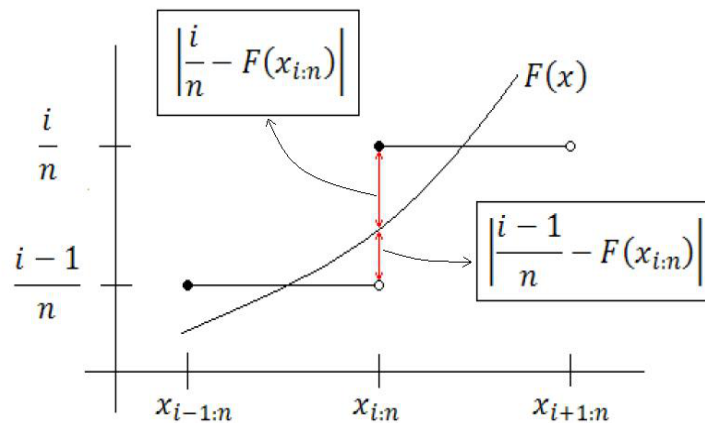


Figura 2.1: Comportamento da função de distribuição empírica e da respectiva função de distribuição, em torno de um valor da amostra.

Então, por observação desta figura podemos concluir que a estatística D_n consiste em maximizar as discrepâncias entre a função de distribuição subjacente à amostra aleatória, postulada na hipótese nula, e a respectiva função de distribuição empírica. Logo usando a definição (1.1), na expressão de D_n , em (2.1), vamos enunciar e demonstrar a seguinte proposição, que mostra como se pode escrever esta estatística em função dos valores da amostra.

Proposição 1. *A estatística de Kolmogorov-Smirnov, representada anteriormente por D_n , e definida em (2.1), pode ser escrita em termos da amostra da seguinte forma,*

$$D_n = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\left| \frac{i}{n} - F(X_{i:n}) \right|, \left| \frac{i-1}{n} - F(X_{i:n}) \right| \right),$$

onde $X_{i:n}$ é a i -ésima estatística ordinal ascendente associada à amostra.

Demonstração. Tem-se,

$$\begin{aligned} D_n &:= \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n^*(x) - F(x)| = \max \left(\max \left(\left| \frac{1}{n} - F(X_{1:n}) \right|, \left| 0 - F(X_{1:n}) \right| \right), \right. \\ &\max \left(\left| \frac{2}{n} - F(X_{2:n}) \right|, \left| \frac{1}{n} - F(X_{2:n}) \right| \right), \dots, \max \left(\left| \frac{i}{n} - F(X_{i:n}) \right|, \left| \frac{i-1}{n} - F(X_{i:n}) \right| \right), \\ &\quad \dots, \max \left(\left| 1 - F(X_{n:n}) \right|, \left| \frac{n-1}{n} - F(X_{n:n}) \right| \right) \Bigg) \\ &\iff D_n = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\left| \frac{i}{n} - F(X_{i:n}) \right|, \left| \frac{i-1}{n} - F(X_{i:n}) \right| \right). \end{aligned}$$

□

Note-se que se F for absolutamente contínua, $F(X)$ é uma v.a. Uniforme em $(0,1)$, independente de F , e consequentemente $F(X_{i:n}) \stackrel{d}{=} U_{i:n}$, onde $U_{i:n}$, $1 \leq i \leq n$, denota a i -ésima estatística ordinal ascendente associada a uma amostra aleatória, (U_1, U_2, \dots, U_n) proveniente de um modelo Uniforme em $(0,1)$. A f.d. assintótica de D_n também é obviamente independente de F , e foi obtida por Kolmogorov (1933a e 1933b) e Feller (1948), tendo-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(D_n \leq \frac{z}{\sqrt{n}} \right) = L(z) := 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} e^{-2m^2 z^2}, \quad z > 0. \quad (2.2)$$

Para $z \leq 0$, tem-se evidentemente, $L(z) = 0$.

Os valores desta distribuição encontram-se tabelados em Smirnov (1948). De seguida apresentamos, na Tabela 2.1, os valores dos pontos críticos z_α : $\mathbb{P}\left(D_n \leq \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}\right) = L(z_\alpha) = 1 - \alpha$, com 5 casas decimais e para $\alpha = .01(.01).99, .999$.

Note-se que os valores críticos assintóticos, $\frac{1.63}{\sqrt{n}}$ ($\alpha = 0.01$) e $\frac{1.36}{\sqrt{n}}$ ($\alpha = 0.05$), são superiores aos valores exactos, para n finito. É pois necessário o cuidado de não usar o valor assintótico quando a dimensão da amostra, n , é pequena.

$L(z_\alpha)$	z_α	$L(z_\alpha)$	z_α	$L(z_\alpha)$	z_α	$L(z_\alpha)$	z_α
0.01	0.44103	0.26	0.68258	0.51	0.83396	0.76	1.02920
0.02	0.46995	0.27	0.68867	0.52	0.84041	0.77	1.03954
0.03	0.48997	0.28	0.69472	0.53	0.84693	0.78	1.05022
0.04	0.50597	0.29	0.70074	0.54	0.85351	0.79	1.06128
0.05	0.51961	0.30	0.70673	0.55	0.86017	0.80	1.07275
0.06	0.53169	0.31	0.71270	0.56	0.86691	0.81	1.08467
0.07	0.54266	0.32	0.71865	0.57	0.87373	0.82	1.09709
0.08	0.55278	0.33	0.72459	0.58	0.88065	0.83	1.11006
0.09	0.56224	0.34	0.73053	0.59	0.88765	0.84	1.12366
0.10	0.57117	0.35	0.73645	0.60	0.89476	0.85	1.13795
0.11	0.57967	0.36	0.74238	0.61	0.90198	0.86	1.15302
0.12	0.58781	0.37	0.74832	0.62	0.90931	0.87	1.16899
0.13	0.59564	0.38	0.75426	0.63	0.91677	0.88	1.18600
0.14	0.60321	0.39	0.76021	0.64	0.92435	0.89	1.20421
0.15	0.61056	0.40	0.76619	0.65	0.93207	0.90	1.22385
0.16	0.61771	0.41	0.77218	0.66	0.93994	0.91	1.24519
0.17	0.62469	0.42	0.77819	0.67	0.94796	0.92	1.26862
0.18	0.63152	0.43	0.78423	0.68	0.95614	0.93	1.29467
0.19	0.63823	0.44	0.79030	0.69	0.96451	0.94	1.32411
0.20	0.64481	0.45	0.79641	0.70	0.97306	0.95	1.35810
0.21	0.65130	0.46	0.80255	0.71	0.98182	0.96	1.39857
0.22	0.65769	0.47	0.80873	0.72	0.99079	0.97	1.44909
0.23	0.66401	0.48	0.81496	0.73	1.00000	0.98	1.51743
0.24	0.67026	0.49	0.82124	0.74	1.00946	0.99	1.62762
0.25	0.67645	0.50	0.82757	0.75	1.01918	0.999	1.94947

Tabela 2.1: Pontos críticos (assintóticos) de D_n .

2.2 Teste W_n^2 de Cramér-von Mises

Este teste, estudado por Cramér (1928), von Mises (1931), Smirnov (1936) e Darling (1955), é baseado na estatística

$$W_n^2 := n \int_{\mathbb{R}} \left(F_n^*(x) - F(x) \right)^2 dF(x). \quad (2.3)$$

Proposição 2. *A estatística de Cramér-von Mises denotada anteriormente por W_n^2 , e definida em (2.3), pode ser escrita na seguinte forma,*

$$W_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{2n} - F(X_{j:n}) \right)^2,$$

onde, mais uma vez, $X_{j:n}$ denota a j -ésima estatística ordinal ascendente associada à amostra.

Demonstração. Em primeiro lugar vamos denotar a amostra ordenada por $(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})$, da mesma forma que no primeiro Capítulo. Para facilitar vamos usar a notação $X_{0:n} = -\infty \Rightarrow F^k(X_{0:n}) = 0, \forall k \in \mathbb{R}$, e $X_{n+1:n} = +\infty \Rightarrow F^k(X_{n+1:n}) = 1, \forall k \in \mathbb{R}$. Podemos verificar que a estatística W_n^2 depende de um integral que varia em toda a recta real, e podemos particionar esse integral em termos dos valores ordenados da amostra. Assim tem-se:

$$\begin{aligned} W_n^2 &:= n \int_{\mathbb{R}} \left(F_n^*(x) - F(x) \right)^2 dF(x) = n \sum_{j=0}^n \left(\int_{X_{j:n}}^{X_{j+1:n}} \left(F_n^*(x) - F(x) \right)^2 dF(x) \right) \\ &= n \sum_{j=0}^n \left(\int_{X_{j:n}}^{X_{j+1:n}} \left(\frac{j}{n} - F(x) \right)^2 dF(x) \right). \end{aligned}$$

Fazendo a seguinte substituição $t = F(x)$, na expressão anterior, e atendendo ao facto que

$$t = F(x) \Rightarrow x = F^{-1}(t) \Rightarrow dF(x) = dt,$$

vamos obter:

$$\begin{aligned} n \sum_{j=0}^n \left(\int_{X_{j:n}}^{X_{j+1:n}} \left(\frac{j}{n} - t \right)^2 dt \right) &= n \sum_{j=0}^n \left(\int_{F(X_{j:n})}^{F(X_{j+1:n})} \left(\frac{j^2}{n^2} - 2\frac{j}{n}t + t^2 \right) dt \right) \\ &= \sum_{j=0}^n \left(\int_{F(X_{j:n})}^{F(X_{j+1:n})} \left(\frac{j^2}{n} - 2jt + nt^2 \right) dt \right). \end{aligned}$$

Como o integral da soma corresponde à soma dos integrais, então aplicando a regra da potência para primitivar, na expressão atrás, vamos obter:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^n \left(\frac{j^2}{n} \left(F(X_{j+1:n}) - F(X_{j:n}) \right) \right. \\ &\quad \left. - j \left(F^2(X_{j+1:n}) - F^2(X_{j:n}) \right) + n \left(\frac{F^3(X_{j+1:n}) - F^3(X_{j:n})}{3} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Em seguida apresentamos três resultados, cuja prova deixamos a cargo do leitor.

$$\sum_{j=0}^n j^2 \left(F^k(X_{j+1:n}) - F^k(X_{j:n}) \right) = - \sum_{j=1}^n (2j-1) F^k(X_{j:n}) + n^2 F^k(X_{n+1:n}), \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

$$\sum_{j=0}^n j \left(F^k(X_{j+1:n}) - F^k(X_{j:n}) \right) = - \sum_{j=1}^n F^k(X_{j:n}) + n F^k(X_{n+1:n}), \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

$$\sum_{j=0}^n \left(F^k(X_{j+1:n}) - F^k(X_{j:n}) \right) = \underbrace{F^k(X_{n+1:n})}_{=1} - \underbrace{F^k(X_{0:n})}_{=0} = 1, \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad (2.7)$$

Aplicando, na expressão (2.4), o resultado (2.5) para $k = 1$, o resultado (2.6) para $k = 2$ e o resultado (2.7) para $k = 3$, obtemos:

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^n \frac{2j-1}{n} F(X_{j:n}) + n F(X_{n+1:n}) + \sum_{j=1}^n F^2(X_{j:n}) - n F^2(X_{n+1:n}) \\ & \quad + n \frac{F^3(X_{n+1:n}) - F^3(X_{0:n})}{3} \\ & = - \overbrace{\sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{2n} \right)^2}^{=0} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{2n} \right)^2 - \sum_{j=1}^n \frac{2j-1}{n} F(X_{j:n}) \\ & \quad + n F(X_{n+1:n}) + \sum_{j=1}^n F^2(X_{j:n}) - n F^2(X_{n+1:n}) + n \frac{F^3(X_{n+1:n}) - F^3(X_{0:n})}{3} \\ & = \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{2j-1}{2n} \right)^2 - 2 \frac{2j-1}{2n} F(X_{j:n}) + F^2(X_{j:n}) \right) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{2n} \right)^2 \\ & \quad + n \overbrace{F(X_{n+1:n})}^{=1} - n \overbrace{F^2(X_{n+1:n})}^{=1} + n \frac{\overbrace{F^3(X_{n+1:n})}^{=1} - \overbrace{F^3(X_{0:n})}^{=0}}{3} \\ & = \sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{2n} - F(X_{j:n}) \right)^2 - \sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{2n} \right)^2 + \frac{n}{3} \\ & = \sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{2n} - F(X_{j:n}) \right)^2 - \frac{1}{4n^2} \sum_{j=1}^n (4j^2 - 4j + 1) + \frac{n}{3} \\ & = \sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{2n} - F(X_{j:n}) \right)^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n j^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n j - \frac{1}{4n} + \frac{n}{3}. \end{aligned}$$

Para nos “libertarmos” de dois dos três somatórios presentes na expressão anterior, vamos utilizar os dois resultados seguintes¹:

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (2.8)$$

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (2.9)$$

Finalmente vem,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{2n} - F(X_{j:n}) \right)^2 - \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{4n} + \frac{n}{3} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{2n} - F(X_{j:n}) \right)^2 - \frac{2(n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 3 - 4n^2}{12n} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{2n} - F(X_{j:n}) \right)^2 - \frac{(4n^2 + 6n + 2) - 6n - 6 + 3 - 4n^2}{12n} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{2n} - F(X_{j:n}) \right)^2 + \frac{1}{12n}. \end{aligned}$$

□

A distribuição assintótica de W_n^2 , estudada em Anderson & Darling (1952), Stephens & Maag (1968) e Csörgő & Faraway (1994), tem a seguinte expressão analítica

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(W_n^2 \leq x) &= 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \frac{e^{-u^2 \frac{x}{2}}}{(-u \sin(u))^{\frac{1}{2}}} du \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})}{k!} (4k+1)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(4k+1)^2}{16x}} K_{\frac{1}{4}} \left(\frac{4k+1}{2x^{\frac{1}{2}}} \right), \quad x > 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde $\Gamma(y) = \int_0^{\infty} u^{y-1} e^{-u} du$, $y > 0$, é a usual função Gama e $K_v(\cdot)$ é a função Bessel modificada de tipo 3, tratada em Watson (1966), página 172, e com expressão dada por:

$$K_v(y) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} y^v}{2^v \Gamma(v + \frac{1}{2})} \int_0^{\infty} e^{-y \cosh(u)} \sinh^{2v}(u) du, \quad y > 0.$$

A expressão (2.10) ainda se pode escrever da seguinte forma

$$\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} e^{-\frac{(4k+1)^2}{16x}} D_{-\frac{1}{2}} \left(\frac{4k+1}{2x^{\frac{1}{2}}} \right), \quad x > 0,$$

¹Ver provas em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/algebra/somapot/somapot.htm>

com $D_v(u)$, $u \in \mathbb{R}$ a função cilíndrica parabólica de índice $v \in \mathbb{R}$, tratada em Abramowitz & Stegun (1973), página 687, expressão 19.3.1. Quando $x \leq 0$ tem-se, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(W_n^2 \leq x) = 0$.

A Tabela 2.2, publicada em Anderson & Darling (1952), contém os valores críticos z_α : $\mathbb{P}(W_n^2 \leq z_\alpha) = \alpha$, com 5 casas decimais e para $\alpha = .01(.01).99, .999$.

α	z_α	α	z_α	α	z_α	α	z_α
0.01	0.02480	0.26	0.07189	0.51	0.12134	0.76	0.21512
0.02	0.02878	0.27	0.07354	0.52	0.12387	0.77	0.22114
0.03	0.03177	0.28	0.07521	0.53	0.12646	0.78	0.22748
0.04	0.03430	0.29	0.07690	0.54	0.12911	0.79	0.23417
0.05	0.03656	0.30	0.07860	0.55	0.13183	0.80	0.24124
0.06	0.03865	0.31	0.08032	0.56	0.13463	0.81	0.24874
0.07	0.04061	0.32	0.08206	0.57	0.13751	0.82	0.25670
0.08	0.04247	0.33	0.08383	0.58	0.14046	0.83	0.26520
0.09	0.04427	0.34	0.08562	0.59	0.14350	0.84	0.27429
0.10	0.04601	0.35	0.08744	0.60	0.14663	0.85	0.28406
0.11	0.04772	0.36	0.08928	0.61	0.14986	0.86	0.29460
0.12	0.04939	0.37	0.09115	0.62	0.15319	0.87	0.30603
0.13	0.05103	0.38	0.09306	0.63	0.15663	0.88	0.31849
0.14	0.05265	0.39	0.09499	0.64	0.1608	0.89	0.33217
0.15	0.05426	0.40	0.09696	0.65	0.16385	0.90	0.34730
0.16	0.05586	0.41	0.09896	0.66	0.16765	0.91	0.36421
0.17	0.05746	0.42	0.10100	0.67	0.17159	0.92	0.38331
0.18	0.05904	0.43	0.10308	0.68	0.17568	0.93	0.40520
0.19	0.06063	0.44	0.10520	0.69	0.17992	0.94	0.43077
0.20	0.06222	0.45	0.10736	0.70	0.18433	0.95	0.46136
0.21	0.06381	0.46	0.10956	0.71	0.18892	0.96	0.49929
0.22	0.06541	0.47	0.11182	0.72	0.19371	0.97	0.54885
0.23	0.06702	0.48	0.11412	0.73	0.19870	0.98	0.61981
0.24	0.06863	0.49	0.11647	0.74	0.20392	0.99	0.74346
0.25	0.07025	0.50	0.11888	0.75	0.20939	0.999	1.16786

Tabela 2.2: Pontos críticos (assintóticos) de W_n^2 .

2.3 Teste U_n^2 de Stephens

Este teste, introduzido em Stephens (1970 e 1974), é baseado na estatística

$$U_n^2 := n \int_{\mathbb{R}} \left(F_n^*(x) - F(x) - \int_{\mathbb{R}} \left(F_n^*(y) - F(y) \right) dF(y) \right)^2 dF(x). \quad (2.11)$$

Proposição 3. *A estatística de Stephens denotada anteriormente por U_n^2 , e definida em (2.11), pode ser escrita na seguinte forma,*

$$U_n^2 = \sum_{j=1}^n \left(F(X_{j:n}) - \frac{2j-1}{2n} - \bar{F} + 0.5 \right)^2 + \frac{1}{12n}, \quad \bar{F} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(X_i),$$

onde $X_{j:n}$ é a j -ésima estatística ordinal ascendente associada à amostra.

Demonstração. Esta demonstração é em muito semelhante à demonstração da Proposição 2, mas desta vez temos dois integrais para trabalhar. Assim vamos em primeiro lugar começar pelo integral interior particionando-o novamente em termos dos valores ordenados da amostra. Assim tem-se:

$$\begin{aligned} U_n^2 &:= n \int_{\mathbb{R}} \left(F_n^*(x) - F(x) - \int_{\mathbb{R}} \left(F_n^*(y) - F(y) \right) dF(y) \right)^2 dF(x) \\ &= n \int_{\mathbb{R}} \left(F_n^*(x) - F(x) - \sum_{j=0}^n \left(\int_{F(X_{j:n})}^{F(X_{j+1:n})} \left(F_n^*(y) - F(y) \right) dF(y) \right) \right)^2 dF(x). \end{aligned}$$

Substituindo $t = F(y)$, na expressão anterior, e atendendo ao facto de que

$$t = F(y) \Rightarrow y = F^{-1}(t) \Rightarrow dF(y) = dt,$$

vamos obter:

$$n \int_{\mathbb{R}} \left(F_n^*(x) - F(x) - \sum_{j=0}^n \left(\int_{F(X_{j:n})}^{F(X_{j+1:n})} \left(\frac{j}{n} - t \right) dt \right) \right)^2 dF(x).$$

Como o integral da soma é a soma dos integrais, novamente integrando pela regra da potência, vem

$$\begin{aligned} &n \int_{\mathbb{R}} \left(F_n^*(x) - F(x) - \sum_{j=0}^n \left(\frac{j}{n} \left(F(X_{j+1:n}) - F(X_{j:n}) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{F^2(X_{j+1:n}) - F^2(X_{j:n})}{2} \right) \right)^2 dF(x) \\ &= n \int_{\mathbb{R}} \left(F_n^*(x) - F(x) - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n j \left(F(X_{j+1:n}) - F(X_{j:n}) \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^n \frac{F^2(X_{j+1:n}) - F^2(X_{j:n})}{2} \right)^2 dF(x). \quad (2.12) \end{aligned}$$

Assim, substituindo na expressão (2.12), o resultado (2.6) para $k = 1$ e o resultado (2.7) para $k = 2$, vamos obter:

$$n \int_{\mathbb{R}} \left(F_n^*(x) - F(x) - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n j \left(F(X_{j+1:n}) - F(X_{j:n}) \right) + \frac{1}{2} \right)^2 dF(x).$$

Aplicando agora a expressão (2.6), pois esta ainda é válida se retirarmos os quadrados, vem

$$\begin{aligned} & n \int_{\mathbb{R}} \left(F_n^*(x) - F(x) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n F(X_{j:n}) - \underbrace{F(X_{n+1:n})}_{=1} + \frac{1}{2} \right)^2 dF(x) \\ &= n \int_{\mathbb{R}} \left(F_n^*(x) - F(x) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n F(X_{j:n}) - \frac{1}{2} \right)^2 dF(x). \end{aligned}$$

Note-se que para qualquer amostra aleatória de dimensão n (X_1, X_2, \dots, X_n) e respectiva amostra ordenada ($X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$) se tem a seguinte igualdade $\sum_{j=1}^n F(X_j) = \sum_{j=1}^n F(X_{j:n})$, devido ao facto de a adição possuir a propriedade associativa. Assim a expressão anterior vem

$$\begin{aligned} & n \int_{\mathbb{R}} \left(F_n^*(x) - F(x) + \overbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n F(X_j)}^{=\bar{F}} - \frac{1}{2} \right)^2 dF(x) \\ &= n \int_{\mathbb{R}} \left(F_n^*(x) - \left(F(x) - \bar{F} + \frac{1}{2} \right) \right)^2 dF(x) \\ &= n \int_{\mathbb{R}} \left(F_n^*(x) - \left(F(x) - \left(\bar{F} - \frac{1}{2} \right) \right) \right)^2 dF(x), \end{aligned}$$

que tem uma expressão funcional semelhante à da estatística de Cramér-von Mises, mas em que, ao contrário da primeira que considera as discrepâncias entre a função de distribuição empírica e a função de distribuição teórica, esta última considera as discrepâncias entre a função de distribuição empírica e $(F(x) - (\bar{F} - \frac{1}{2}))$.

Agora vamos tratar do segundo integral, procedendo da mesma forma com que tratámos o integral anterior. Tem-se

$$\begin{aligned} & n \int_{\mathbb{R}} \left(F_n^*(x) - \left(F(x) - \bar{F} + \frac{1}{2} \right) \right)^2 dF(x) \\ &= n \sum_{j=0}^n \left(\int_{X_{j:n}}^{X_{j+1:n}} \left(\frac{j}{n} - \left(F(x) - \bar{F} + \frac{1}{2} \right) \right)^2 dF(x) \right). \end{aligned}$$

Usando a mesma transformação, mais uma vez, vem:

$$\begin{aligned} & n \sum_{j=0}^n \left(\int_{F(X_{j:n})}^{F(X_{j+1:n})} \left(\frac{j}{n} - \left(t - \bar{F} + \frac{1}{2} \right) \right)^2 dt \right) \\ &= n \sum_{j=0}^n \left(\int_{F(X_{j:n})}^{F(X_{j+1:n})} \left(-t + \left(\frac{j}{n} + \bar{F} - \frac{1}{2} \right) \right)^2 dt \right) \end{aligned}$$

$$= n \sum_{j=0}^n \left(\int_{F(X_{j:n})}^{F(X_{j+1:n})} \left((-t)^2 - 2t \left(\frac{j}{n} + \bar{F} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{j}{n} + \bar{F} - \frac{1}{2} \right)^2 \right) dt \right).$$

Recorrendo novamente à regra da potência para primitivar, vem

$$\begin{aligned} n \sum_{j=0}^n \left(\frac{F^3(X_{j+1:n}) - F^3(X_{j:n})}{3} - 2 \frac{F^2(X_{j+1:n}) - F^2(X_{j:n})}{2} \left(\frac{j}{n} + \bar{F} - \frac{1}{2} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{j}{n} + \bar{F} - \frac{1}{2} \right)^2 \left(F(X_{j+1:n}) - F(X_{j:n}) \right) \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Aplicando o resultado (2.7) na expressão (2.13), obtemos

$$\begin{aligned} n \frac{\overbrace{F^3(X_{n+1:n})}^{=1} - \overbrace{F^3(X_{0:n})}^{=0}}{3} - n \sum_{j=0}^n \left(F^2(X_{j+1:n}) - F^2(X_{j:n}) \right) \left(\frac{j}{n} + \bar{F} - \frac{1}{2} \right) \\ + n \sum_{j=0}^n \left(\frac{j}{n} + \bar{F} - \frac{1}{2} \right)^2 \left(F(X_{j+1:n}) - F(X_{j:n}) \right) \\ = \frac{n}{3} - \sum_{j=0}^n j \left(F^2(X_{j+1:n}) - F^2(X_{j:n}) \right) - n \left(\bar{F} - \frac{1}{2} \right) \sum_{j=0}^n \left(F^2(X_{j+1:n}) - F^2(X_{j:n}) \right) \\ + n \sum_{j=0}^n \left(\left(\frac{j}{n} \right)^2 + 2 \frac{j}{n} \left(\bar{F} - \frac{1}{2} \right) + \left(\bar{F} - \frac{1}{2} \right)^2 \right) \left(F(X_{j+1:n}) - F(X_{j:n}) \right) \\ = \frac{n}{3} - \sum_{j=0}^n j \left(F^2(X_{j+1:n}) - F^2(X_{j:n}) \right) - n \left(\bar{F} - \frac{1}{2} \right) \sum_{j=0}^n \left(F^2(X_{j+1:n}) - F^2(X_{j:n}) \right) \\ + \sum_{j=0}^n \frac{j^2}{n} \left(F(X_{j+1:n}) - F(X_{j:n}) \right) + 2 \left(\bar{F} - \frac{1}{2} \right) \sum_{j=0}^n j \left(F(X_{j+1:n}) - F(X_{j:n}) \right) \\ + n \left(\bar{F} - \frac{1}{2} \right)^2 \sum_{j=0}^n \left(F(X_{j+1:n}) - F(X_{j:n}) \right). \end{aligned}$$

Recorrendo novamente aos resultados (2.5), (2.6) e (2.7), para $k = \{1, 2\}$, vem

$$\begin{aligned} \frac{n}{3} + \sum_{j=1}^n F^2(X_{j:n}) - n F^2(X_{n+1:n}) - n \left(\bar{F} - \frac{1}{2} \right) - \sum_{j=1}^n \frac{2j-1}{n} F(X_{j:n}) \\ + n F(X_{n+1:n}) + 2 \left(\bar{F} - \frac{1}{2} \right) \left(- \sum_{j=1}^n F(X_{j:n}) + n F(X_{n+1:n}) \right) + n \left(\bar{F} - \frac{1}{2} \right)^2 \\ = \frac{n}{3} + \sum_{j=1}^n F^2(X_{j:n}) - n \overbrace{F^2(X_{n+1:n})}^{=1} - n \left(\bar{F} - \frac{1}{2} \right) - \sum_{j=1}^n \frac{2j-1}{n} F(X_{j:n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +n \underbrace{F(X_{n+1:n})}_{=1} - 2\left(\bar{F} - \frac{1}{2}\right) \sum_{j=1}^n F(X_{j:n}) + 2n\left(\bar{F} - \frac{1}{2}\right) \underbrace{F(X_{n+1:n})}_{=1} + n\left(\bar{F} - \frac{1}{2}\right)^2 \\
& = \frac{n}{3} + \sum_{j=1}^n F^2(X_{j:n}) - \sum_{j=1}^n \frac{2j-1}{n} F(X_{j:n}) \\
& \quad - 2\left(\bar{F} - \frac{1}{2}\right) \sum_{j=1}^n F(X_{j:n}) + n\left(\bar{F} - \frac{1}{2}\right) + n\left(\bar{F} - \frac{1}{2}\right)^2 \\
& = \frac{n}{3} + n\left(\bar{F} - \frac{1}{2}\right) \overbrace{- \sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{2n}\right)^2 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{2n}\right)^2}^{=0} \\
& \quad - \overbrace{\sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{n}\right) \left(\bar{F} - \frac{1}{2}\right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{n}\right) \left(\bar{F} - \frac{1}{2}\right)}^{=0} \\
& \quad + \sum_{j=1}^n \left(F^2(X_{j:n}) - \frac{2j-1}{n} F(X_{j:n}) - 2\left(\bar{F} - \frac{1}{2}\right) F(X_{j:n}) + \left(\bar{F} - \frac{1}{2}\right)^2 \right) \\
& = \frac{n}{3} + n\left(\bar{F} - \frac{1}{2}\right) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{2n}\right)^2 - \sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{n}\right) \left(\bar{F} - \frac{1}{2}\right) \\
& \quad + \sum_{j=1}^n \left(F(X_{j:n}) - \frac{2j-1}{2n} - \left(\bar{F} - \frac{1}{2}\right) \right)^2.
\end{aligned}$$

Decorre da demonstração da Proposição 2 que

$$\frac{n}{3} - \sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{12n}.$$

Então, juntando esta nova condição à expressão anteriormente obtida, obtém-se

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{12n} + n\left(\bar{F} - \frac{1}{2}\right) - \left(\bar{F} - \frac{1}{2}\right) \sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{n}\right) + \sum_{j=1}^n \left(F(X_{j:n}) - \frac{2j-1}{2n} - \left(\bar{F} - \frac{1}{2}\right) \right)^2 \\
& = \frac{1}{12n} + \left(\bar{F} - \frac{1}{2}\right) \left(n - \sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{n}\right) \right) + \sum_{j=1}^n \left(F(X_{j:n}) - \frac{2j-1}{2n} - \left(\bar{F} - \frac{1}{2}\right) \right)^2.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Note-se que

$$\left(\bar{F} - \frac{1}{2}\right) \left(n - \sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{n}\right) \right) = 0.$$

De facto tem-se, usando a expressão (2.8),

$$\begin{aligned} n - \sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{n} \right) &= n - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n j + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1 = n - \frac{2}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n} n \\ &= n - (n+1) + 1 = 0 \\ \Rightarrow n - \sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{n} \right) &= 0 \Rightarrow \left(\bar{F} - \frac{1}{2} \right) \left(n - \sum_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{n} \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Voltando à expressão (2.14), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{12n} + 0 + \sum_{j=1}^n \left(F(X_{j:n}) - \frac{2j-1}{2n} - \left(\bar{F} - \frac{1}{2} \right) \right)^2 \\ = \frac{1}{12n} + \sum_{j=1}^n \left(F(X_{j:n}) - \frac{2j-1}{2n} - \left(\bar{F} - \frac{1}{2} \right) \right)^2, \end{aligned}$$

como se pretendia demonstrar. \square

A distribuição limite de U_n^2 , estudada em Csörgő & Faraway (1994), pode ser facilmente expressa à custa da distribuição limite $L(\cdot)$ da estatística de Kolmogorov-Smirnov, tendo-se,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(U_n^2 \leq z) = L(\pi\sqrt{z}) := 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} e^{-2m^2\pi^2 z},$$

com $L(\cdot)$ definida em (2.2).

Ao contrário das duas tabelas anteriores, não encontrámos nenhum livro ou artigo que tivesse esta tabela publicada. Assim decidimos construir nós próprios a referida tabela. Para isso aplicámos o seguinte algoritmo no R (veja-se Secção A.1), que apresentamos aqui em pseudo-código:

Algoritmo 1. *Cálculo do quantil de probabilidade p da estatística U_n^2*

1. *Inicialize-se o limite superior (n) do somatório de $L(\cdot)$, com um valor elevado.*
2. *Dê-se um conjunto admissível de quantis (q), no qual se inclui o quantil óptimo.*
3. *Inicialize-se uma variável (erro) para controlar o erro, com um valor grande.*
4. *Para cada valor do conjunto q , digamos j , faça-se:*
 5. *Inicialize-se uma variável contadora (conta) a zero.*
 6. *Para cada valor de i desde 1 até n , faça-se:*
 7. *Atualize-se, $\text{conta} = \text{conta} + (-1)^{i-1} e^{-2i^2\pi^2 q}$*
 8. *Calcule-se, $l = 1 - 2\text{conta}$*
 9. *Calcule-se, $\text{erro_aux} = |l - p|$*
 10. *Se $\text{erro_aux} \leq \text{erro}$, então:*

11. *Atualize-se,* erro = erro_aux
12. *Atualize-se,* quantil = j
13. *Devolva-se,* quantil

Note-se que no passo 1 do algoritmo pedimos um valor de n elevado, porque o somatório tem um número infinito de parcelas, mas neste caso como se tem $e^{-2i^2\pi^2q} \approx 0$, $\forall i \geq 15$ podemos colocar $n = 15$ sem qualquer problema (ver passo 7 do respectivo algoritmo). Na Tabela 2.3 apresentamos os valores críticos z_α : $\mathbb{P}(U_n^2 \leq z_\alpha) = L(\pi\sqrt{z_\alpha})$, com 5 casas decimais e para $\alpha = .01(.01).99, .999$.

$L(\pi\sqrt{z_\alpha})$	z_α	$L(\pi\sqrt{z_\alpha})$	z_α	$L(\pi\sqrt{z_\alpha})$	z_α	$L(\pi\sqrt{z_\alpha})$	z_α
0.01	0.01971	0.26	0.04721	0.51	0.07047	0.76	0.10733
0.02	0.02238	0.27	0.04805	0.52	0.07156	0.77	0.10949
0.03	0.02432	0.28	0.04890	0.53	0.07268	0.78	0.11175
0.04	0.02594	0.29	0.04975	0.54	0.07381	0.79	0.11412
0.05	0.02736	0.30	0.05061	0.55	0.07497	0.80	0.11660
0.06	0.02864	0.31	0.05147	0.56	0.07615	0.81	0.11921
0.07	0.02984	0.32	0.05233	0.57	0.07735	0.82	0.12195
0.08	0.03096	0.33	0.05320	0.58	0.07858	0.83	0.12485
0.09	0.03203	0.34	0.05407	0.59	0.07983	0.84	0.12793
0.10	0.03305	0.35	0.05495	0.60	0.08112	0.85	0.13120
0.11	0.03405	0.36	0.05584	0.61	0.08243	0.86	0.13470
0.12	0.03501	0.37	0.05674	0.62	0.08378	0.87	0.13846
0.13	0.03595	0.38	0.05764	0.63	0.08516	0.88	0.14252
0.14	0.03687	0.39	0.05856	0.64	0.08657	0.89	0.14693
0.15	0.03777	0.40	0.05948	0.65	0.08802	0.90	0.15176
0.16	0.03866	0.41	0.06041	0.66	0.08952	0.91	0.15710
0.17	0.03954	0.42	0.06136	0.67	0.09105	0.92	0.16307
0.18	0.04041	0.43	0.06231	0.68	0.09263	0.93	0.16983
0.19	0.04127	0.44	0.06328	0.69	0.09426	0.94	0.17764
0.20	0.04213	0.45	0.06426	0.70	0.09594	0.95	0.18688
0.21	0.04298	0.46	0.06526	0.71	0.09767	0.96	0.19818
0.22	0.04383	0.47	0.06627	0.72	0.09946	0.97	0.21276
0.23	0.04467	0.48	0.06729	0.73	0.10132	0.98	0.23330
0.24	0.04552	0.49	0.06833	0.74	0.10325	0.99	0.26842
0.25	0.04636	0.50	0.06939	0.75	0.10525	0.999	0.30000

Tabela 2.3: Pontos críticos (assintóticos) de U_n^2 .

Gostaríamos ainda de fazer uma última referência, antes de finalizar este capítulo. Todas as tabelas aqui apresentadas foram construídas sem a necessidade de estimação de parâmetros. Mais adiante veremos como se podem construir tabelas para o caso em que temos que proceder à estimação de parâmetros.

Capítulo 3

Breve Referência à Teoria de Valores Extremos

Estamos aqui interessados em referir alguns modelos com relevo na área de valores extremos. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sucessão de v.a.'s i.i.d. $\sim F(x)$, e pensemos em

$$M_n := X_{n:n} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i, \quad n \geq 1, \quad (3.1)$$

e em

$$m_n := X_{1:n} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i, \quad n \geq 1. \quad (3.2)$$

A f.d. de M_n , em (3.1), é dada por

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) &= \mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} X_i \leq x\right) = \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq x) = (\mathbb{P}(X \leq x))^n = F^n(x), \end{aligned}$$

e a respectiva função para m_n , definida em (3.2), é

$$\begin{aligned} F_{m_n}(x) &= \mathbb{P}(m_n \leq x) = 1 - \mathbb{P}(m_n \geq x) = \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\min_{1 \leq i \leq n} X_i \geq x\right) = 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \geq x) = \\ &= 1 - (\mathbb{P}(X \geq x))^n = 1 - (1 - \mathbb{P}(X \leq x))^n = 1 - (1 - F(x))^n. \end{aligned}$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtém-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } F(x) < 1 \\ 1 & \text{se } F(x) = 1, \end{cases}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{m_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } F(x) = 0 \\ 1 & \text{se } F(x) > 0, \end{cases}$$

i.e., a distribuição limite, mesmo quando é própria, é degenerada e consequentemente de interesse muito limitado.

Consideraremos aqui os seguintes tópicos de teoria de valores extremos:

1. O teorema de Gnedenko — tipos possíveis de distribuição limite não degenerada de M_n , convenientemente normalizado, bem como de m_n , também convenientemente normalizado.
2. O comportamento limite dos excessos $X_i - u | X_i > u$ acima de um nível $u = u_n \rightarrow x^F$, quando $n \rightarrow \infty$.

3.1 O Teorema de Gnedenko

Podemos pois perguntar se será possível encontrar constantes $\{a_n\}_{n \geq 1}$ ($a_n > 0$) e $\{b_n\}_{n \geq 1}$ tais que

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{w} Y, \quad \text{v.a. não degenerada,}$$

i.e., tais que

$$F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} G(x), \quad (3.3)$$

com $G(x)$ f.d. não degenerada.

Definição 1. Se existirem sucessões de constantes $\{a_n\}_{n \geq 1}$ ($a_n > 0$) e $\{b_n\}_{n \geq 1}$ tais que se verifica (3.3), tais sucessões de constantes são designadas por **coeficientes de atração** de F para G , e diremos que F pertence ao **domínio de atração** (para máximos) da lei G , o que será denotado por $F \in \mathcal{D}_M(G)$.

São pois de interesse os dois problemas a seguir apresentados, formulados explicitamente a primeira vez por Gnedenko (1943):

- (i) identificação das possíveis formas limites G da f.d. de $\frac{M_n - b_n}{a_n}$, para sucessões de constantes convenientes, $\{a_n\}_{n \geq 1}$ ($a_n > 0$) e $\{b_n\}_{n \geq 1}$;
- (ii) caracterização do domínio de atração das possíveis leis limites para máximos, i.e., caracterização de

$$\mathcal{D}_M(G) := \left\{ F : \exists \{a_n\}_{n \geq 1} (a_n > 0) \text{ e } \{b_n\}_{n \geq 1} \text{ para as quais} \right. \\ \left. F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} G(x), \forall x \in \mathcal{C}(G) \right\}. \quad (3.4)$$

onde $\mathcal{C}(G)$ é o conjunto dos pontos de continuidade em $G(x)$. Começaremos por introduzir o conceito de **tipo** (de Khinchine):

Lema 1 (convergência de tipos de Khinchine). *Sejam $U_1(x)$ e $U_2(x)$ duas funções de distribuição não degeneradas. Se para uma sucessão $\{F_n\}_{n \geq 1}$ de funções de distribuição existem constantes reais $\{a_n\}_{n \geq 1}$ ($a_n > 0$), $\{b_n\}_{n \geq 1}$, $\{a'_n\}_{n \geq 1}$ ($a'_n > 0$) e $\{b'_n\}_{n \geq 1}$ tais que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(a_n x + b_n) = U_1(x); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(a'_n x + b'_n) = U_2(x) \quad (3.5)$$

então

$$\frac{a'_n}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \ (A > 0); \quad \frac{b'_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B, \quad (3.6)$$

e

$$U_2(x) = U_1(Ax + B), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

Inversamente, se (3.6) for válido, qualquer das relações em (3.5) implica a outra e (3.7).

Demonstração. Para uma boa demonstração deste lema veja-se Feller, Vol. II, página 246. \square

Este lema conduz obviamente à seguinte definição formal do conceito de tipo:

Definição 2. *Duas f.d.'s $U_1(x)$ e $U_2(x)$ são do mesmo tipo se existem constantes reais $A > 0$ e B tais que $U_2(x) = U_1(Ax + B)$.*

Enunciaremos sem demonstração o célebre teorema de Gnedenko, o resultado fulcral em TVE.

Teorema 1 (Gnedenko, 1943). *No contexto acima referido, admitamos que existem sucessões de constantes $\{a_n\}_{n \geq 1}$ ($a_n > 0$), $\{b_n\}_{n \geq 1}$ e uma f.d. não degenerada G tais que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x), \quad \forall x \in \mathcal{C}(G). \quad (3.8)$$

Então G pertence a um dos três tipos de distribuições de Valores Extremos:

$$\text{Tipo I:} \quad \Lambda(x) = e^{-e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.9)$$

$$\text{Tipo II:} \quad \Phi_\alpha(x) = e^{-x^{-\alpha}}, \quad x > 0, \alpha > 0, \quad (3.10)$$

$$\text{Tipo III:} \quad \Psi_\alpha(x) = e^{-(-x)^\alpha}, \quad x < 0, \alpha > 0, \quad (3.11)$$

usualmente conhecidas como distribuição de Gumbel, de Fréchet e de Weibull, respectivamente.

Os três modelos apresentados em (3.9), (3.10) e (3.11) podem ser representados numa forma única, conhecida como a forma de von Mises-Jenkinson ou como a distribuição de *Valores Extremos*, já definida em (1.2), denotada por $G_\gamma(x)$ e que voltamos a escrever.

$$G_\gamma(x) = \begin{cases} e^{-(1+\gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}}, & 1 + \gamma x > 0 \quad \text{se } \gamma \neq 0 \\ e^{-e^{-x}}, & x \in \mathbb{R} \quad \text{se } \gamma = 0. \end{cases}$$

Observação 1. Usando o limite notável, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$, tem-se

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^-} e^{-(1+\gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}} = \lim_{\gamma \rightarrow 0^-} e^{-\left(1 - \frac{x}{-\frac{1}{\gamma}}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}} = e^{-\lim_{\gamma \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{x}{-\frac{1}{\gamma}}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}} = e^{-e^{-x}},$$

pois quando $\gamma \rightarrow 0^- \Rightarrow -\frac{1}{\gamma} \rightarrow \infty$.

O parâmetro de forma γ é usualmente designado por *índice de valores extremos*, e dita o comportamento da cauda direita de F . Quanto mais elevado for γ maior é o peso da cauda direita, $\bar{F} := 1 - F$.

A distribuição de Valores Extremos, pode ser escrita à custa dos modelos Gumbel, Fréchet e Weibull, da seguinte forma

$$G_\gamma(x) = \begin{cases} \Phi_{\frac{1}{\gamma}}(1 + \gamma x) & \text{se } \gamma > 0 \\ \Psi_{-\frac{1}{\gamma}}(-(1 + \gamma x)) & \text{se } \gamma < 0 \\ \Lambda(x) & \text{se } \gamma = 0. \end{cases}$$

Para se obter a respectiva função densidade de probabilidade (f.d.p.) basta derivar a f.d. $G_\gamma(x)$ em ordem a x , o que irá dar origem a

$$g_\gamma(x) = \frac{d}{dx} G_\gamma(x) = \begin{cases} (1 + \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}-1} e^{-(1+\gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}}, & 1 + \gamma x > 0 \quad \text{se } \gamma \neq 0 \\ e^{-x} e^{-e^{-x}}, & x \in \mathbb{R} \quad \text{se } \gamma = 0. \end{cases}$$

Em seguida, na Figura 3.1, apresentam-se as densidades $g_\gamma(x)$ para γ igual a 0.4, 0 e -0.4 e a densidade de probabilidade da Normal padrão.

Note-se desde já que os resultados obtidos para máximos podem ser de imediato convertidos em resultados para mínimos, pois, como referimos anteriormente,

$$\min_{1 \leq i \leq n} X_i = - \max_{1 \leq i \leq n} (-X_i). \quad (3.12)$$

Também se pode passar de mínimos para máximos da seguinte forma

$$\max_{1 \leq i \leq n} X_i = - \min_{1 \leq i \leq n} (-X_i). \quad (3.13)$$

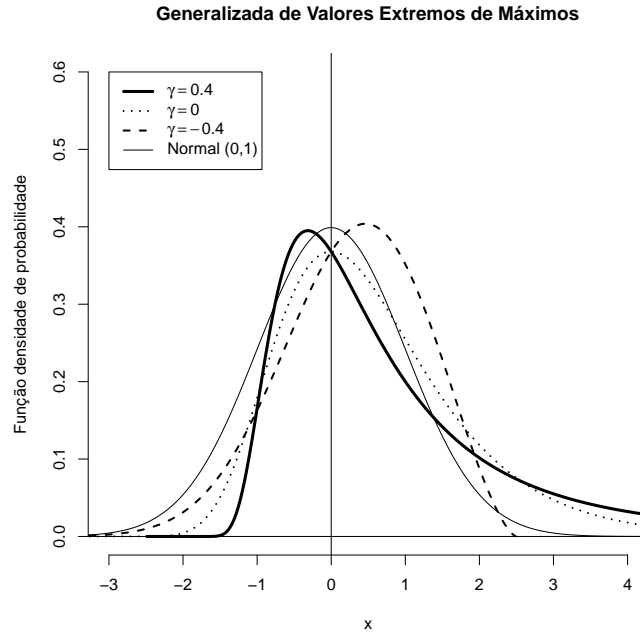


Figura 3.1: Representações gráficas da função densidade de probabilidade da Generalizada de Valores Extremos para máximos e da Normal reduzida.

Podemos agora colocar a seguinte questão : se $X \sim G_\gamma(x)$, então qual é a distribuição do simétrico de X , i.e., qual a distribuição de $-X$? Tem-se

$$F_{-X}(x) = \mathbb{P}(-X \leq x) = \mathbb{P}(X \geq -x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq -x) = 1 - F_X(-x).$$

Vamos denotar a distribuição da variável aleatória $-X$ por $G_\gamma^*(x)$. Assim se $X \sim G_\gamma(x)$ então $-X \sim 1 - G_\gamma(-x) = G_\gamma^*(x)$.

Agora os modelos (3.9), (3.10) e (3.11), vêm respectivamente na versão para mínimos

$$\text{Tipo I : } \Lambda^*(x) = 1 - e^{-e^x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.14)$$

$$\text{Tipo II : } \Phi_\alpha^*(x) = 1 - e^{-(-x)^{-\alpha}}, \quad x < 0, \alpha > 0, \quad (3.15)$$

$$\text{Tipo III : } \Psi_\alpha^*(x) = 1 - e^{-x^\alpha}, \quad x > 0, \alpha > 0. \quad (3.16)$$

Tal como aconteceu com as distribuições para máximos, estas três últimas distribuições podem ser representadas de forma unificada, pois tínhamos visto no Capítulo 1, mais precisamente na expressão (1.3), que

$$G_\gamma^*(x) = 1 - G_\gamma(-x) = \begin{cases} 1 - e^{-(1-\gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}}, & 1 - \gamma x > 0, \text{ se } \gamma \neq 0 \\ 1 - e^{-e^x}, & x \in \mathbb{R} \text{ se } \gamma = 0. \end{cases}$$

Observação 2. Usando o mesmo limite notável que na Observação 1, tem-se

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^-} 1 - e^{-(1+\gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}} = \lim_{\gamma \rightarrow 0^-} 1 - e^{-\left(1 - \frac{x}{-\frac{1}{\gamma}}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}} = 1 - e^{-\lim_{\gamma \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{x}{-\frac{1}{\gamma}}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}} = 1 - e^{-e^{-x}},$$

pois quando $\gamma \rightarrow 0^- \Rightarrow -\frac{1}{\gamma} \rightarrow \infty$.

A correspondente f.d.p. é dada por

$$g_\gamma^*(x) = \frac{d}{dx} G_\gamma^*(x) = \begin{cases} (1 - \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}-1} e^{-(1-\gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}}, & 1 - \gamma x > 0 \quad \text{se } \gamma \neq 0 \\ e^x e^{-e^x}, & x \in \mathbb{R} \quad \text{se } \gamma = 0. \end{cases}$$

Na Figura 3.2, apresentam-se as representações gráficas de $g_\gamma^*(x)$ para γ igual a 0.4, 0 e -0.4 e da densidade Normal padrão.

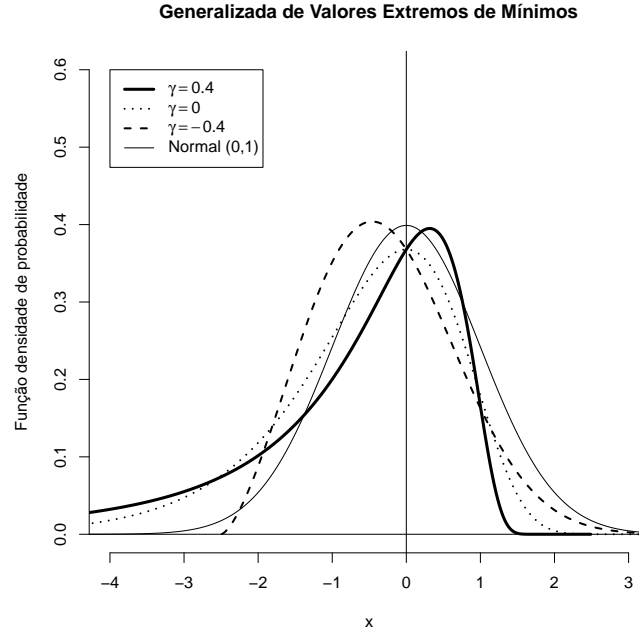


Figura 3.2: Representações gráficas da função densidade de probabilidade da Generalizada de Valores Extremos para mínimos e da Normal reduzida.

Naturalmente, e como seria de esperar, a distribuição de Valores Extremos para mínimos pode ser escrita à custa dos modelos Gumbel, Fréchet e Weibull de mínimos, como a seguir se mostra

$$G_\gamma^*(x) = \begin{cases} \Phi_{\frac{1}{\gamma}}^*(-(1 - \gamma x)) & \text{se } \gamma > 0 \\ \Psi_{-\frac{1}{\gamma}}^*(1 - \gamma x) & \text{se } \gamma < 0 \\ \Lambda^*(x) & \text{se } \gamma = 0. \end{cases}$$

3.2 Comportamento Limite dos Excessos Acima de um Nível Elevado

Um outro resultado fundamental em TVE é devido em simultâneo a Balkema & de Haan (1974) e Pickands (1975), os quais independentemente provaram que, sob condições adequadas, a distribuição *generalizada de Pareto*, $GP_\gamma(x)$, cuja f.d. é definida em (1.4), é a distribuição limite dos excessos, convenientemente escalados, acima de um nível u . De forma mais precisa, se considerarmos a chamada *função de excesso*,

$$F_u(x) := \mathbb{P}(X - u \leq x | X > u),$$

então, $F \in \mathcal{D}_M(G_\gamma)$ se e só se existir uma função real positiva $\sigma(u)$ tal que

$$\lim_{u \rightarrow x^F} \sup_{0 < x < x^F - u} \left| F_u(x) - GP_\gamma\left(\frac{x}{\sigma(u)}\right) \right| = 0,$$

com $GP_\gamma(x)$ definida em (1.4). Para detalhes veja-se, por exemplo, Embrechts *et al.* (1997), Secção 3.4, e Reiss & Thomas (2007), Secção 1.4.

Tal como anteriormente, podemos considerar separadamente as três regiões, $\gamma < 0$, $\gamma = 0$ e $\gamma > 0$, obtendo então os três tipos:

$$\text{Tipo I : } P_1(x) = 1 - e^{-x}, \quad x > 0 \quad (\text{Exponencial}) \quad (3.17)$$

$$\text{Tipo II : } P_{2,\alpha}(x) = 1 - x^{-\alpha}, \quad x > 1, \quad \alpha > 0 \quad (\text{Pareto}) \quad (3.18)$$

$$\text{Tipo III : } P_{3,\alpha}(x) = 1 - (-x)^\alpha, \quad -1 < x < 0, \quad \alpha > 0 \quad (\text{Beta simétrica}). \quad (3.19)$$

Reescrevendo novamente a expressão $GP_\gamma(x)$, exposta em (1.4),

$$GP_\gamma(x) = 1 + \ln G_\gamma(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}, & 1 + \gamma x > 0, \quad x > 0 & \text{se } \gamma \neq 0 \\ 1 - e^{-x}, & x > 0 & \text{se } \gamma = 0. \end{cases}$$

Observação 3. Usando novamente o mesmo argumento da Observação 1, tem-se

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^-} 1 - (1 + \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}} = \lim_{\gamma \rightarrow 0^-} 1 - \left(1 - \frac{x}{-\frac{1}{\gamma}}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} = 1 - \lim_{\gamma \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{x}{-\frac{1}{\gamma}}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} = 1 - e^{-x},$$

pois quando $\gamma \rightarrow 0^- \Rightarrow -\frac{1}{\gamma} \rightarrow \infty$.

Podemos através da f.d. $GP_\gamma(x)$ calcular a f.d.p. da Pareto Generalizada, da mesma forma que procedemos na Secção 3.1 para a Generalizada de Valores Extremos, obtendo-se

assim

$$\begin{aligned}
 gp_\gamma(x) &= \frac{d}{dx} GP_\gamma(x) = \frac{d}{dx} (1 + \ln G_\gamma(x)) = \frac{d}{dx} \ln G_\gamma(x) = \frac{\frac{d}{dx} G_\gamma(x)}{G_\gamma(x)} \\
 &= \frac{g_\gamma(x)}{G_\gamma(x)} = \begin{cases} \frac{(1+\gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}-1} e^{-(1+\gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}}}{e^{-(1+\gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}}}, & 1 + \gamma x > 0, x > 0 \quad \text{se } \gamma \neq 0 \\ \frac{e^{-x} e^{-e^{-x}}}{e^{-e^{-x}}}, & x > 0 \quad \text{se } \gamma = 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} (1 + \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}-1}, & 1 + \gamma x > 0, x > 0 \quad \text{se } \gamma \neq 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \quad \text{se } \gamma = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Note-se, mais uma vez, que $GP_\gamma(x)$ pode escrever-se unicamente à custa das expressões (3.17), (3.18) e (3.19), na seguinte forma:

$$GP_\gamma(x) = \begin{cases} P_{2, \frac{1}{\gamma}}(1 + \gamma x) & \text{se } \gamma > 0 \\ P_{3, -\frac{1}{\gamma}}(-(1 + \gamma x)) & \text{se } \gamma < 0 \\ P_1(x) & \text{se } \gamma = 0. \end{cases}$$

Segue-se na Figura 4.1, as representações gráficas das densidades de $gp_\gamma(x)$ para γ igual a 0.4, 0 e -0.4.

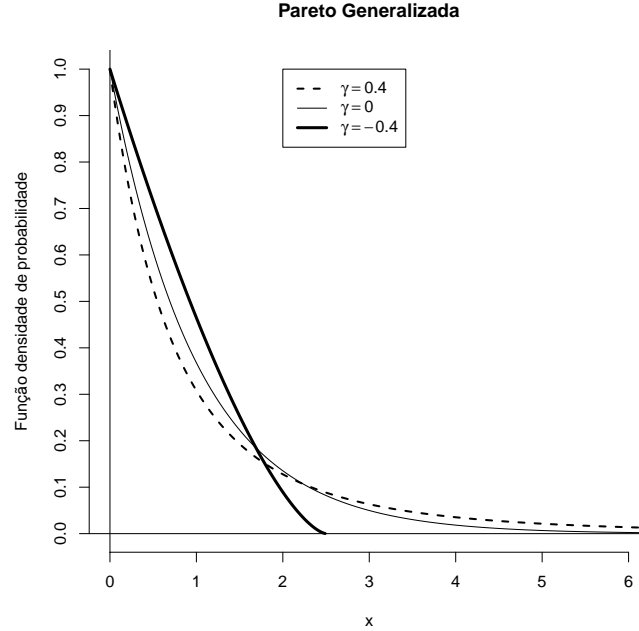


Figura 3.3: Representações gráficas da função densidade de probabilidade da Pareto Generalizada.

Capítulo 4

Algumas Propriedades dos Modelos e Estimação de Parâmetros

Neste Capítulo, vamos descrever alguns métodos de inferência estatística associados às distribuições descritas no Capítulo 3. Iremos, conforme o nome deste Capítulo indica, fazer um estudo sobre os momentos teóricos destes modelos e derivar as expressões de alguns estimadores dos parâmetros dos quais esses modelos dependem. Vamos abordar essencialmente três métodos para calcular os estimadores dos parâmetros destas distribuições:

1. Estimadores dos Momentos (ME – do Inglês, Moment Estimators);
2. Estimadores dos Momentos Probabilisticamente Ponderados (PWME – do Inglês, Probability Weighted Moments Estimators);
3. Estimadores de Máxima Verosimilhança (MLE – do Inglês, Maximum Likelihood Estimators).

Antes de iniciarmos este estudo, recordemos que no Capítulo 3, em todas as distribuições deduzidas trabalhamos apenas com um parâmetro, γ , o parâmetro de forma. Assim, caso haja necessidade e de acordo com o interesse, iremos adicionar mais alguns parâmetros a estas distribuições (como por exemplo, escala e localização).

4.1 Pareto Generalizada

Nesta Secção, ao contrário da expressão (1.4), sempre que nos referirmos à Pareto Generalizada, estar-nos-emos a referir à f.d. seguinte

$$GP_\gamma(x; \delta) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}, & 1 + \gamma \frac{x}{\delta} > 0, x > 0, \delta > 0 & \text{se } \gamma \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\delta}}, & x > 0, \delta > 0 & \text{se } \gamma = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

com a respectiva f.d.p, dada por

$$gp_\gamma(x; \delta) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1}, & 1 + \gamma \frac{x}{\delta} > 0, x > 0, \delta > 0 & \text{se } \gamma \neq 0 \\ \frac{1}{\delta} e^{-\frac{x}{\delta}}, & x > 0, \delta > 0 & \text{se } \gamma = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Ou seja, toda a inferência que se segue, diz respeito à Pareto Generalizada com parâmetro de forma γ e parâmetro de escala δ , i.e., ao modelo $GP_\gamma(x; \delta) = GP_\gamma\left(\frac{x}{\delta}\right)$, com $GP_\gamma(x)$ definida em (1.4).

A distribuição de Pareto Generalizada reduz-se à distribuição Exponencial de valor médio δ quando $\gamma = 0$ e à distribuição Uniforme(0, δ) no caso de $\gamma = -1$. Note-se também que $\gamma > 0$ corresponde à família de distribuições Pareto. Repare-se ainda que o suporte desta distribuição varia conforme o valor de γ se altera. Ora, se $\gamma < 0$, então $0 < x < -\frac{\delta}{\gamma}$. Caso se tenha $\gamma > 0$, vem $0 < x < \infty$.

4.1.1 Momentos da Distribuição Pareto Generalizada

O cálculo dos momentos da distribuição de Pareto Generalizada pode ser obtido usando o seguinte teorema:

Teorema 2. *Seja X uma variável aleatória onde $X \sim GP_\gamma(x; \delta)$. Então o momento não central de ordem k só existe para $\gamma < \frac{1}{k}$ e é dado por*

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{k! \delta^k}{\prod_{i=1}^k (1 - i\gamma)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Demonstração. Vamos começar pelo caso em que $\gamma > 0$. Para isso vamos socorrer-nos de um resultado que pode ser encontrado em Gradshteyn & Ryzhik (2007), página 322, **3.241**, integral n°4, válido para $0 < \frac{u}{v} < n + 1$, $p \neq 0$, $q \neq 0$, e que apresentamos em seguida:

$$\int_0^\infty \frac{x^{u-1}}{(p + qx^v)^{n+1}} dx = \frac{1}{vp^{n+1}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{u}{v}} \frac{\Gamma\left(\frac{u}{v}\right) \Gamma\left(1 + n - \frac{u}{v}\right)}{\Gamma(1 + n)}. \quad (4.3)$$

Em primeiro lugar pela definição de valor médio e pela expressão (4.2) vem que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^k] &:= \int_0^\infty x^k gp_\gamma(x; \delta) dx = \int_0^\infty x^k \frac{1}{\delta} \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} dx \\ &= \frac{1}{\delta} \int_0^\infty x^k \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} dx. \end{aligned}$$

Aplicando agora a fórmula (4.3), para $u = k + 1$, $v = p = 1$, $q = \frac{\gamma}{\delta}$ e $n = \frac{1}{\gamma}$, vem

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^k] &= \frac{1}{\delta} \frac{1}{1^{\frac{1}{\gamma}+1}} \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{k+1}{1}} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{1})\Gamma(1 + \frac{1}{\gamma} - \frac{k+1}{1})}{\Gamma(1 + \frac{1}{\gamma})} \\ &= \delta^k \frac{1}{\gamma^{k+1}} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{\gamma} - k)}{\Gamma(1 + \frac{1}{\gamma})}.\end{aligned}$$

Vamos agora, recordar duas propriedades da função Gama

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+, \quad (4.4)$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \forall x > 0. \quad (4.5)$$

Usando a expressão (4.4) e aplicando repetidamente, $k+1$ vezes, a expressão recursiva (4.5), o quociente das funções Gama vem dado por

$$\frac{k!}{\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\left(\frac{1}{\gamma}-2\right)\dots\left(\frac{1}{\gamma}-k\right)} = \frac{k!\gamma^{k+1}}{(1-\gamma)(1-2\gamma)\dots(1-k\gamma)} = \frac{k!\gamma^{k+1}}{\prod_{i=1}^k(1-i\gamma)}.$$

Finalmente,

$$\mathbb{E}[X^k] = \delta^k \frac{1}{\gamma^{k+1}} \frac{k!\gamma^{k+1}}{\prod_{i=1}^k(1-i\gamma)} = \frac{k!\delta^k}{\prod_{i=1}^k(1-i\gamma)}.$$

Agora vamos passar ao caso em que $\gamma < 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^k] &= \int_0^{-\frac{\delta}{\gamma}} x^k g p_{\gamma}(x; \delta) dx = \int_0^{-\frac{\delta}{\gamma}} x^k \frac{1}{\delta} \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} dx \\ &= \frac{1}{\delta} \int_0^{-\frac{\delta}{\gamma}} x^k \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} dx = \frac{1}{\gamma} \int_0^{-\frac{\delta}{\gamma}} x^k \frac{\gamma}{\delta} \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} dx.\end{aligned}$$

Efectuando uma primitivação por partes, no integral anterior, i.e., fazendo

$$\begin{cases} u = x^k \\ v' = \frac{\gamma}{\delta} \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = kx^{k-1} \\ v = \frac{(1+\gamma\frac{x}{\delta})^{-\frac{1}{\gamma}}}{-\frac{1}{\gamma}}, \end{cases}$$

vem que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^k] &= \frac{1}{\gamma} \left(\left[x^k \frac{(1+\gamma\frac{x}{\delta})^{-\frac{1}{\gamma}}}{-\frac{1}{\gamma}} \right]_0^{-\frac{\delta}{\gamma}} - \int_0^{-\frac{\delta}{\gamma}} kx^{k-1} \frac{(1+\gamma\frac{x}{\delta})^{-\frac{1}{\gamma}}}{-\frac{1}{\gamma}} dx \right) \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(0 + k\gamma \int_0^{-\frac{\delta}{\gamma}} x^{k-1} \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} dx \right) \\ &= k \int_0^{-\frac{\delta}{\gamma}} x^{k-1} \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} dx = k \frac{\delta}{\gamma} \int_0^{-\frac{\delta}{\gamma}} x^{k-1} \frac{\gamma}{\delta} \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} dx.\end{aligned}$$

Efectuando novamente uma primitivação por partes, no integral anterior, i.e., fazendo desta vez

$$\begin{cases} u = x^{k-1} \\ v' = \frac{\gamma}{\delta} \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = (k-1)x^{k-2} \\ v = \frac{(1+\gamma \frac{x}{\delta})^{-\frac{1}{\gamma}+1}}{-\frac{1}{\gamma}+1}, \end{cases}$$

vamos obter

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^k] &= k \frac{\delta}{\gamma} \left(\left[x^{k-1} \frac{(1 + \gamma \frac{x}{\delta})^{-\frac{1}{\gamma}+1}}{-\frac{1}{\gamma}+1} \right]_0^{-\frac{\delta}{\gamma}} - \int_0^{-\frac{\delta}{\gamma}} (k-1)x^{k-2} \frac{(1 + \gamma \frac{x}{\delta})^{-\frac{1}{\gamma}+1}}{-\frac{1}{\gamma}+1} dx \right) \\ &= k \frac{\delta}{\gamma} \left(0 - (k-1) \frac{1}{-\frac{1}{\gamma}+1} \int_0^{-\frac{\delta}{\gamma}} x^{k-2} \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}+1} dx \right) \\ &= -k(k-1) \left(\frac{\delta}{\gamma} \right) \frac{1}{-\frac{1}{\gamma}+1} \int_0^{-\frac{\delta}{\gamma}} x^{k-2} \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}+1} dx \\ &= k(k-1) \delta \frac{-\frac{1}{\gamma}}{-\frac{1}{\gamma}+1} \int_0^{-\frac{\delta}{\gamma}} x^{k-2} \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}+1} dx \\ &= k(k-1) \left(\frac{\delta^2}{\gamma} \right) \frac{1}{1-\gamma} \int_0^{-\frac{\delta}{\gamma}} x^{k-2} \frac{\gamma}{\delta} \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}+1} dx. \end{aligned}$$

Voltando a efectuar o mesmo processo de primitivação $k-2$ vezes, iremos obter

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^k] &= k(k-1) \dots (k-(k-1)) \frac{\delta^k}{\gamma} \frac{1}{\prod_{i=1}^{k-1} (1-i\gamma)} \int_0^{-\frac{\delta}{\gamma}} \frac{\gamma}{\delta} \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}+(k-1)} dx \\ &= k(k-1) \dots 1 \frac{\delta^k}{\gamma} \frac{1}{\prod_{i=1}^{k-1} (1-i\gamma)} \left[\frac{\left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}+k}}{-\frac{1}{\gamma}+k} \right]_0^{-\frac{\delta}{\gamma}} \\ &= k! \delta^k \frac{1}{\gamma \prod_{i=1}^{k-1} (1-i\gamma)} \left(-\frac{1}{-\frac{1}{\gamma}+k} \right) = k! \delta^k \frac{1}{\prod_{i=1}^{k-1} (1-i\gamma)} \left(\frac{-\frac{1}{\gamma}}{-\frac{1}{\gamma}+k} \right) \\ &= k! \delta^k \frac{1}{\prod_{i=1}^{k-1} (1-i\gamma)} \left(\frac{1}{1-k\gamma} \right) = k! \delta^k \frac{1}{\prod_{i=1}^k (1-i\gamma)}. \end{aligned}$$

Resta-nos mostrar o caso em que $\gamma = 0$. Temos então

$$\mathbb{E}[X^k] = \int_0^\infty x^k g p_\gamma(x; \delta) dx = \int_0^\infty x^k \frac{1}{\delta} e^{-\frac{x}{\delta}} dx = - \int_0^\infty x^k \left(-\frac{1}{\delta} \right) e^{-\frac{x}{\delta}} dx.$$

Efectuando uma primitivação por partes, no integral anterior, fazendo

$$\begin{cases} u = x^k \\ v' = -\frac{1}{\delta} e^{-\frac{x}{\delta}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = kx^{k-1} \\ v = e^{-\frac{x}{\delta}}, \end{cases}$$

vem que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^k] &= -\left(\left[x^k e^{-\frac{x}{\delta}}\right]_0^\infty - \int_0^\infty kx^{k-1} e^{-\frac{x}{\delta}} dx\right) \\ &= -\left(\underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{-\frac{x}{\delta}}}_{=0, \text{ ver Obs. 5}} - 0\right) - k\delta \int_0^\infty x^{k-1} \left(-\frac{1}{\delta}\right) e^{-\frac{x}{\delta}} dx.\end{aligned}$$

Voltando a primitivar por partes, mais $k - 1$ vezes, teremos

$$\mathbb{E}[X^k] = k(k-1) \dots (k-(k-1))\delta^k \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{\delta} e^{-\frac{x}{\delta}} dx}_{=1} = k!\delta^k,$$

como queríamos demonstrar. \square

Observação 4. Note-se que o integral (4.3) existe quando $0 < k + 1 < \frac{1}{\gamma} + 1 \Leftrightarrow k < \frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow \gamma < \frac{1}{k}$. As restantes condições verificam-se pois $p = 1 \neq 0$ e $q = \frac{\gamma}{\delta} > 0 \Leftrightarrow q \neq 0$, (visto que, $\gamma, \delta > 0$).

Observação 5. No caso em que $\gamma = 0$, tem-se que $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{-\frac{x}{\delta}} = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. De facto tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{-\frac{x}{\delta}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^{\frac{x}{\delta}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \leftarrow \text{Indeterminação}$$

Para levantar esta indeterminação vamos usar a regra de L'Hôpital, derivando o numerador e o denominador, ao mesmo tempo. Nesta situação vamos efectuar este processo k vezes, o que origina

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k!}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^k e^{\frac{x}{\delta}}} = 0.$$

Este Teorema é bastante importante visto ter algumas consequências imediatas. Por exemplo, com o auxílio do Teorema de König que diz que $\sigma^2 := Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$, podemos calcular a variância da Pareto Generalizada. Assim,

$$\begin{aligned}\sigma^2 := Var[X] &= \frac{2!\delta^2}{\prod_{i=1}^2 (1 - i\gamma)} - \left(\frac{1!\delta^1}{\prod_{i=1}^1 (1 - i\gamma)}\right)^2 = \frac{2\delta^2}{(1 - \gamma)(1 - 2\gamma)} - \frac{\delta^2}{(1 - \gamma)^2} \\ &= \frac{2\delta^2(1 - \gamma) - \delta^2(1 - 2\gamma)}{(1 - \gamma)^2(1 - 2\gamma)} = \frac{2\delta^2 - 2\delta^2\gamma - \delta^2 + 2\delta^2\gamma}{(1 - \gamma)^2(1 - 2\gamma)} \\ &= \frac{\delta^2}{(1 - \gamma)^2(1 - 2\gamma)}, \quad \text{para } \gamma < \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ainda podemos retirar uma expressão explícita para o terceiro momento standardizado, a assimetria, que é dado por $\sqrt{\beta_1} = \mathbb{E}\left[\frac{(X-\mu)^3}{\sigma^3}\right]$, onde $\mu = E[X]$ e $\sigma = \sqrt{Var[X]}$, tendo

sido a variância de X definida na expressão anterior. Tem-se

$$\begin{aligned}\sqrt{\beta_1} &= \mathbb{E} \left[\frac{(X - \mu)^3}{\sigma^3} \right] = \frac{1}{\sigma^3} \mathbb{E} [(X - \mu)^3] = \frac{1}{\sigma^3} \mathbb{E} [X^3 - 3\mu X^2 + 3\mu^2 X - \mu^3] \\ &= \frac{1}{\sigma^3} \left(\mathbb{E} [X^3] - 3\mu \mathbb{E} [X^2] + 3\mu^2 \underbrace{\mathbb{E} [X]}_{=\mu} - \mu^3 \right) = \frac{\mathbb{E} [X^3] - 3\mu \mathbb{E} [X^2] + 2\mu^3}{\sigma^3}.\end{aligned}$$

Recorrendo ao Teorema 2, vamos obter

$$\begin{aligned}\sqrt{\beta_1} &= \frac{\frac{3!\delta^3}{\prod_{i=1}^3(1-i\gamma)} - 3\frac{\delta}{1-\gamma} \frac{2!\delta^2}{\prod_{i=1}^2(1-i\gamma)} + 2\frac{\delta^3}{(1-\gamma)^3}}{\left(\sqrt{\frac{\delta^2}{(1-\gamma)^2(1-2\gamma)}} \right)^3} \\ &= \frac{\frac{6\delta^3}{(1-\gamma)(1-2\gamma)(1-3\gamma)} - \frac{6\delta^3}{(1-\gamma)^2(1-2\gamma)} + \frac{2\delta^3}{(1-\gamma)^3}}{\frac{\delta^3}{(1-\gamma)^3(\sqrt{1-2\gamma})^{\frac{3}{2}}}} \\ &= \frac{\frac{6\delta^3(1-\gamma)^2 - 6\delta^3(1-\gamma)(1-3\gamma) + 2\delta^3(1-2\gamma)(1-3\gamma)}{(1-\gamma)^3(1-2\gamma)(1-3\gamma)}}{\frac{\delta^3}{(1-\gamma)^3(\sqrt{1-2\gamma})^{\frac{3}{2}}}} \\ &= \frac{(6(1-\gamma)^2 - 6(1-\gamma)(1-3\gamma) + 2(1-2\gamma)(1-3\gamma))\sqrt{1-2\gamma}}{1-3\gamma} \\ &= \dots = \frac{(2+2\gamma)\sqrt{1-2\gamma}}{1-3\gamma} = \frac{2(1+\gamma)\sqrt{1-2\gamma}}{1-3\gamma}, \quad \text{para } \gamma < \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Mais, ainda podemos calcular o quarto momento standardizado, o achatamento, dado por $\beta_2 = \mathbb{E} \left[\frac{(X - \mu)^4}{\sigma^4} \right]$, onde μ e σ têm o mesmo significado que no terceiro momento standardizado.

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \mathbb{E} \left[\frac{(X - \mu)^4}{\sigma^4} \right] = \frac{1}{\sigma^4} \mathbb{E} [(X - \mu)^4] = \frac{1}{\sigma^4} \mathbb{E} [X^4 - 4\mu X^3 + 6\mu^2 X^2 - 4\mu^3 X + \mu^4] \\ &= \frac{\mathbb{E} [X^4] - 4\mu \mathbb{E} [X^3] + 6\mu^2 \mathbb{E} [X^2] - 4\mu^3 \underbrace{\mathbb{E} [X]}_{=\mu} + \mu^4}{\sigma^4} \\ &= \frac{\mathbb{E} [X^4] - 4\mu \mathbb{E} [X^3] + 6\mu^2 \mathbb{E} [X^2] - 3\mu^4}{\sigma^4}.\end{aligned}$$

Utilizando, novamente o Teorema 2, vem

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \frac{\frac{4!\delta^4}{\prod_{i=1}^4(1-i\gamma)} - 4\frac{\delta}{1-\gamma} \frac{3!\delta^3}{\prod_{i=1}^3(1-i\gamma)} + 6\frac{\delta^2}{(1-\gamma)^2} \frac{2!\delta^2}{\prod_{i=1}^2(1-i\gamma)} - 3\frac{\delta^4}{(1-\gamma)^4}}{\left(\sqrt{\frac{\delta^2}{(1-\gamma)^2(1-2\gamma)}} \right)^4} \\ &= \frac{\frac{24\delta^4}{(1-\gamma)(1-2\gamma)(1-3\gamma)(1-4\gamma)} - \frac{24\delta^4}{(1-\gamma)^2(1-2\gamma)(1-3\gamma)} + \frac{12\delta^4}{(1-\gamma)^3(1-2\gamma)} - \frac{3\delta^4}{(1-\gamma)^4}}{\frac{\delta^4}{(1-\gamma)^4(1-2\gamma)^2}} \\ &= \frac{\frac{24\delta^4(1-\gamma)^3 - 24\delta^4(1-\gamma)^2(1-4\gamma) + 12\delta^4(1-\gamma)(1-3\gamma)(1-4\gamma) - 3\delta^4(1-2\gamma)(1-3\gamma)(1-4\gamma)}{(1-\gamma)^4(1-2\gamma)(1-3\gamma)(1-4\gamma)}}{\frac{\delta^4}{(1-\gamma)^4(1-2\gamma)^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(24(1-\gamma)^3 - 24(1-\gamma)^2(1-4\gamma) + 12(1-\gamma)(1-3\gamma)(1-4\gamma))(1-2\gamma)}{(1-3\gamma)(1-4\gamma)} \\
&\quad - \frac{(3(1-2\gamma)(1-3\gamma)(1-4\gamma))(1-2\gamma)}{(1-3\gamma)(1-4\gamma)} \\
&= \dots = \frac{(9+3\gamma+6\gamma^2)(1-2\gamma)}{(1-3\gamma)(1-4\gamma)} = \frac{3(3+\gamma+2\gamma^2)(1-2\gamma)}{(1-3\gamma)(1-4\gamma)}, \quad \text{para } \gamma < \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Antes de entrarmos na parte dos estimadores, note-se que se $X \sim GP_\gamma(x; \delta)$, então a transformada $Y = 1 + \gamma \frac{X}{\delta}$, terá a seguinte f.d.:

$$F_Y(x) = \mathbb{P} \left[1 + \gamma \frac{X}{\delta} \leq x \right] = \mathbb{P} \left[\gamma \frac{X}{\delta} \leq x - 1 \right] = \mathbb{P} [\gamma X \leq \delta(x - 1)].$$

Se $\gamma > 0$, então:

$$\mathbb{P} [\gamma X \leq \delta(x - 1)] = \mathbb{P} \left[X \leq \frac{\delta}{\gamma}(x - 1) \right] = GP_\gamma \left(\frac{\delta}{\gamma}(x - 1); \delta \right) = 1 - x^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad x \geq 1,$$

que corresponde à f.d. da Pareto de Tipo I, com escala unitária. O momento não central de ordem k , para esta distribuição é dado por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [Y^k] &= \int_1^\infty x^k \frac{1}{\gamma} x^{-\frac{1}{\gamma}-1} dx = \frac{1}{\gamma} \int_1^\infty x^{k-\frac{1}{\gamma}-1} dx = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{x^{k-\frac{1}{\gamma}}}{k-\frac{1}{\gamma}} \right]_1^\infty \\
&= \frac{1}{\gamma} \left(\underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{k-\frac{1}{\gamma}}}{k-\frac{1}{\gamma}}}_{=0, \text{ ver Obs. 6}} - \frac{1}{k-\frac{1}{\gamma}} \right) = \frac{1}{\gamma} \left(0 - \frac{1}{k-\frac{1}{\gamma}} \right) = \frac{\frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{\gamma} - k} = \frac{1}{1 - \gamma k}, \quad \text{para } \gamma < \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Observação 6. O limite anterior só existe para $\gamma < \frac{1}{k}$. De facto tem-se,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{k-\frac{1}{\gamma}}}{k-\frac{1}{\gamma}} = \begin{cases} 0, & \text{se } \gamma < \frac{1}{k} \\ \infty, & \text{se } \gamma > \frac{1}{k}. \end{cases}$$

Caso se tenha $\gamma < 0$, então vem:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} [\gamma X \leq \delta(x - 1)] &= \mathbb{P} \left[X \geq -\frac{\delta}{\gamma}(1 - x) \right] = 1 - \mathbb{P} \left[X \leq -\frac{\delta}{\gamma}(1 - x) \right] \\
&= 1 - GP_\gamma \left(-\frac{\delta}{\gamma}(1 - x); \delta \right) = 1 - \left(1 - x^{-\frac{1}{\gamma}} \right) = x^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad 0 \leq x \leq 1,
\end{aligned}$$

que é uma Beta $\left(-\frac{1}{\gamma}, 1\right)$, cujo momento não central de ordem k , vem dado por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [Y^k] &= \int_0^1 x^k \left(-\frac{1}{\gamma} \right) x^{-\frac{1}{\gamma}-1} dx = -\frac{1}{\gamma} \int_0^1 x^{k-\frac{1}{\gamma}-1} dx = -\frac{1}{\gamma} \left[\frac{x^{k-\frac{1}{\gamma}}}{k-\frac{1}{\gamma}} \right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{1^{k-\frac{1}{\gamma}}}{k-\frac{1}{\gamma}} - 0 \right) = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{k-\frac{1}{\gamma}} - 0 \right) = \frac{\frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{\gamma} - k} = \frac{1}{1 - \gamma k}.
\end{aligned}$$

4.1.2 Estimação dos Parâmetros Desconhecidos

Vamos em seguida passar para o estudo dos estimadores. Como já dissemos no início deste Capítulo, vamos abordar três métodos. Para qualquer destes métodos vamos admitir que as amostras recolhidas têm dimensão n .

Método dos Momentos

Trata-se, talvez, do método de estimação mais simples. Neste método, os estimadores são usualmente determinados através da correspondência entre os primeiros k momentos empíricos, definidos por m'_k , e os correspondentes k momentos populacionais, sendo k o número de parâmetros a estimar. Matematicamente falando, a ideia consiste em resolver a(s) equação(ões) seguinte(s):

$$m'_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k = \mathbb{E}[X^k], \quad k = 1, 2, \dots,$$

Recorrendo ao Teorema 2, temos

$$k = 1 : \quad \mathbb{E}[X] = \frac{\delta}{1-\gamma} = m'_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i =: \bar{X},$$

$$k = 2 : \quad \mathbb{E}[X^2] = \frac{2\delta^2}{(1-\gamma)(1-2\gamma)} = m'_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Resolvendo estas duas equações em ordem a γ e δ , vamos obter

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta}{1-\gamma} = \bar{X} \\ \frac{2\delta^2}{(1-\gamma)(1-2\gamma)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta}{1-\gamma} = \bar{X} \\ \frac{2\delta^2}{(1-\gamma)(1-2\gamma)} - \frac{\delta^2}{(1-\gamma)^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{n\bar{X}^2}{n} \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta}{1-\gamma} = \bar{X} \\ \frac{2\delta^2(1-\gamma) - \delta^2(1-2\gamma)}{(1-\gamma)^2(1-2\gamma)} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n} =: S^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta}{1-\gamma} = \bar{X} \\ \frac{\delta^2}{(1-\gamma)^2(1-2\gamma)} = S^2 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta = \bar{X}(1-\gamma) \\ \frac{\delta^2}{(1-\gamma)^2(1-2\gamma)} = S^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta = \bar{X}(1-\gamma) \\ \frac{\bar{X}^2(1-\gamma)^2}{(1-\gamma)^2(1-2\gamma)} = S^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta = \bar{X}(1-\gamma) \\ \frac{\bar{X}^2}{1-2\gamma} = S^2 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta = \bar{X}(1-\gamma) \\ \frac{\bar{X}^2}{S^2} = 1-2\gamma \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta = \bar{X}(1-\gamma) \\ 1 - \frac{\bar{X}^2}{S^2} = 2\gamma \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta = \bar{X}(1-\gamma) \\ \gamma = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\bar{X}^2}{S^2} \right) \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta = \bar{X} \left(1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\bar{X}^2}{S^2} \right) \right) \\ \gamma = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\bar{X}^2}{S^2} \right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta = \bar{X} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\bar{X}^2}{S^2} \right) \\ \gamma = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\bar{X}^2}{S^2} \right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta = \frac{1}{2} \bar{X} \left(1 + \frac{\bar{X}^2}{S^2} \right) \\ \gamma = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\bar{X}^2}{S^2} \right) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Logo os estimadores dos momentos pretendidos são dados por

$$\begin{cases} \hat{\delta} = \frac{1}{2} \bar{X} \left(1 + \frac{\bar{X}^2}{S^2} \right) \\ \hat{\gamma} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\bar{X}^2}{S^2} \right), \end{cases}$$

onde $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ e $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n}$ são respectivamente a média amostral e a variância amostral não corrigida.

Método dos Momentos Probabilisticamente Ponderados

Este método foi sugerido por Hosking & Wallis (1987), e usa, como o próprio nome indica, os momentos probabilisticamente ponderados, definidos por

$$M_{p, r, s} := \mathbb{E} \left[X^p F_X^r(X) (1 - F_X(X))^s \right],$$

sendo p , r e s números reais. Existem dois casos especiais simples, para esta medida. Nesta Secção apenas iremos apresentar um deles,

$$\alpha_s := M_{1, 0, s} = \mathbb{E} \left[X (1 - F_X(X))^s \right],$$

enquanto que o outro será deixado para a próxima parte.

Para uma amostra ordenada $(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})$, Landwehr *et al.* (1979), provaram que o estimador

$$a_s = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\binom{n-j}{s}}{\binom{n-1}{s}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(n-j)(n-j-1) \dots (n-j-s+1)}{(n-1)(n-2) \dots (n-s)} X_{j:n}$$

é centrado para α_s . Para além de a_s , ainda existe um outro estimador para α_s , que vamos denotar por \tilde{a}_s , dado pela seguinte expressão:

$$\tilde{a}_s = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (1 - p_{j:n})^s X_{j:n},$$

onde, $p_{j:n}$ as chamadas “plotting positions” são dadas por $p_{j:n} = \frac{j+z}{n+w}$, sendo z e w constantes. Em Johnson *et al.* (1994) é sugerida a escolha $z = -0.375$ e $w = 0.25$ e em Hosking & Wallis (1987), é aconselhado usar-se $z = -0.35$ e $w = 0$. Os estimadores a_s e \tilde{a}_s são assintoticamente equivalentes. Ainda podemos dizer que estes dois estimadores são ambos consistentes para α_s .

Esta metodologia, que é semelhante ao método dos momentos, consiste em resolver a(s) equação(ões) $M_{1, 0, s} = \tilde{a}_s$, $s = 0, 1, \dots$, em ordem ao(s) parâmetro(s) desejado(s). Repare-se que temos de ter tantas equações quantos os parâmetros que queremos estimar.

No caso da Pareto Generalizada, para $\gamma > 0$, tem-se

$$\begin{aligned} M_{1, 0, s} &= \int_0^\infty x \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{s}{\gamma}} \frac{1}{\delta} \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} dx = \frac{1}{\delta} \int_0^\infty x \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{s+1}{\gamma}-1} dx \\ &= \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty x \frac{\gamma}{\delta} \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{s+1}{\gamma}-1} dx. \end{aligned}$$

Primitivando por partes, da seguinte forma

$$\begin{cases} u = x \\ v' = \frac{\gamma}{\delta} \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{s+1}{\gamma}-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = \frac{(1 + \gamma \frac{x}{\delta})^{-\frac{s+1}{\gamma}}}{-\frac{s+1}{\gamma}}, \end{cases}$$

vem

$$\begin{aligned} M_{1, 0, s} &= \frac{1}{\gamma} \left(\left[x \frac{(1 + \gamma \frac{x}{\delta})^{-\frac{s+1}{\gamma}}}{-\frac{s+1}{\gamma}} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{(1 + \gamma \frac{x}{\delta})^{-\frac{s+1}{\gamma}}}{-\frac{s+1}{\gamma}} dx \right) \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(\underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{(1 + \gamma \frac{x}{\delta})^{-\frac{s+1}{\gamma}}}{-\frac{s+1}{\gamma}} - 0}_{=0, \text{ ver Obs. 7}} \right) - \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty \frac{(1 + \gamma \frac{x}{\delta})^{-\frac{s+1}{\gamma}}}{-\frac{s+1}{\gamma}} dx \\ &= \frac{1}{s+1} \frac{\delta}{\gamma} \int_0^\infty \frac{\gamma}{\delta} \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{s+1}{\gamma}} dx = \frac{1}{s+1} \frac{\delta}{\gamma} \left[\frac{(1 + \gamma \frac{x}{\delta})^{-\frac{s+1}{\gamma}+1}}{-\frac{s+1}{\gamma} + 1} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{s+1} \frac{\delta}{\gamma} \left(\underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + \gamma \frac{x}{\delta})^{-\frac{s+1}{\gamma}+1}}{-\frac{s+1}{\gamma} + 1} - \frac{1}{-\frac{s+1}{\gamma} + 1}}_{=0, \text{ ver Obs. 8}} \right) = \frac{\delta}{(s+1)(s+1-\gamma)}, \quad \text{para } \gamma < s+1. \end{aligned}$$

Observação 7. Para $-\frac{s+1}{\gamma} < 0 \Leftrightarrow s > -1$, tem-se que $\lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{(1 + \gamma \frac{x}{\delta})^{-\frac{s+1}{\gamma}}}{-\frac{s+1}{\gamma}} = 0$. De facto tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{(1 + \gamma \frac{x}{\delta})^{-\frac{s+1}{\gamma}}}{-\frac{s+1}{\gamma}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{-\frac{s+1}{\gamma} (1 + \gamma \frac{x}{\delta})^{\frac{s+1}{\gamma}}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \leftarrow \text{Indeterminação}$$

Para levantar esta indeterminação vamos usar novamente a regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{-\frac{s+1}{\gamma} (1 + \gamma \frac{x}{\delta})^{\frac{s+1}{\gamma}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{-\frac{(s+1)^2}{\gamma \delta} (1 + \gamma \frac{x}{\delta})^{\frac{s+1}{\gamma}-1}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Observação 8. Para $-\frac{s+1}{\gamma} + 1 < 0 \Leftrightarrow \gamma < s+1$, tem-se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + \gamma \frac{x}{\delta})^{-\frac{s+1}{\gamma}+1}}{-\frac{s+1}{\gamma} + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{-(\frac{s+1}{\gamma} - 1) (1 + \gamma \frac{x}{\delta})^{-\frac{s+1}{\gamma}+1}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Para $\gamma < 0$, vem

$$\begin{aligned} M_{1, 0, s} &= \int_0^{-\frac{\delta}{\gamma}} x \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{s}{\gamma}} \frac{1}{\delta} \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} dx = \frac{1}{\delta} \int_0^{-\frac{\delta}{\gamma}} x \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{s+1}{\gamma}-1} dx \\ &= \frac{1}{\gamma} \int_0^{-\frac{\delta}{\gamma}} x \frac{\gamma}{\delta} \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{s+1}{\gamma}-1} dx. \end{aligned}$$

Usando a primitivação por partes, da mesma forma que para o caso em que γ era positivo, vem

$$\begin{aligned} M_{1, 0, s} &= \frac{1}{\gamma} \left(\underbrace{\left[x \frac{(1 + \gamma \frac{x}{\delta})^{-\frac{s+1}{\gamma}}}{-\frac{s+1}{\gamma}} \right]_0}_{=0} - \int_0^{-\frac{\delta}{\gamma}} \frac{(1 + \gamma \frac{x}{\delta})^{-\frac{s+1}{\gamma}}}{-\frac{s+1}{\gamma}} dx \right) \\ &= -\frac{1}{\gamma} \int_0^{-\frac{\delta}{\gamma}} \frac{(1 + \gamma \frac{x}{\delta})^{-\frac{s+1}{\gamma}}}{-\frac{s+1}{\gamma}} dx = \frac{1}{s+1} \frac{\delta}{\gamma} \int_0^{-\frac{\delta}{\gamma}} \frac{\gamma}{\delta} \left(1 + \gamma \frac{x}{\delta}\right)^{-\frac{s+1}{\gamma}} dx \\ &= \frac{1}{s+1} \frac{\delta}{\gamma} \underbrace{\left[\frac{(1 + \gamma \frac{x}{\delta})^{-\frac{s+1}{\gamma}+1}}{-\frac{s+1}{\gamma} + 1} \right]_0}_{=-\frac{1}{-\frac{s+1}{\gamma}+1}} = \frac{1}{s+1} \frac{\delta}{\gamma} \frac{1}{\frac{s+1}{\gamma} - 1} = \frac{\delta}{(s+1)(s+1-\gamma)}. \end{aligned}$$

Por fim, vamos passar ao cálculo dos estimadores,

$$s = 0 : \quad M_{1, 0, 0} = \frac{\delta}{1-\gamma} = \tilde{a}_0,$$

$$s = 1 : \quad M_{1, 0, 1} = \frac{\delta}{2(2-\gamma)} = \tilde{a}_1.$$

Resolvendo para δ e γ , obtem-se

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{\delta}{1-\gamma} = \tilde{a}_0 \\ \frac{\delta}{2(2-\gamma)} = \tilde{a}_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = \tilde{a}_0(1-\gamma) \\ \frac{\delta}{2(2-\gamma)} = \tilde{a}_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = \tilde{a}_0 - \tilde{a}_0\gamma \\ \frac{\delta}{2(2-\gamma)} = \tilde{a}_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \delta = \tilde{a}_0 - \tilde{a}_0\gamma \\ \frac{\tilde{a}_0 - \tilde{a}_0\gamma}{2(2-\gamma)} = \tilde{a}_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = \tilde{a}_0 - \tilde{a}_0\gamma \\ \frac{\tilde{a}_0 - \tilde{a}_0\gamma}{4-2\gamma} = \tilde{a}_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = \tilde{a}_0 - \tilde{a}_0\gamma \\ \tilde{a}_0 - \tilde{a}_0\gamma = \tilde{a}_1(4-2\gamma) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \delta = \tilde{a}_0 - \tilde{a}_0\gamma \\ \tilde{a}_0 - \tilde{a}_0\gamma = 4\tilde{a}_1 - 2\gamma\tilde{a}_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = \tilde{a}_0 - \tilde{a}_0\gamma \\ \tilde{a}_0 - 4\tilde{a}_1 = \tilde{a}_0\gamma - 2\gamma\tilde{a}_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \delta = \tilde{a}_0 - \tilde{a}_0\gamma \\ \tilde{a}_0 - 4\tilde{a}_1 = \gamma(\tilde{a}_0 - 2\tilde{a}_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = \tilde{a}_0 - \tilde{a}_0\gamma \\ \gamma = \frac{\tilde{a}_0 - 4\tilde{a}_1}{\tilde{a}_0 - 2\tilde{a}_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = \tilde{a}_0 - \tilde{a}_0 \frac{\tilde{a}_0 - 4\tilde{a}_1}{\tilde{a}_0 - 2\tilde{a}_1} \\ \gamma = \frac{\tilde{a}_0 - 4\tilde{a}_1}{\tilde{a}_0 - 2\tilde{a}_1} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} \delta = \frac{\tilde{a}_0(\tilde{a}_0-2\tilde{a}_1)}{\tilde{a}_0-2\tilde{a}_1} - \frac{\tilde{a}_0(\tilde{a}_0-4\tilde{a}_1)}{\tilde{a}_0-2\tilde{a}_1} \\ \gamma = \frac{\tilde{a}_0-4\tilde{a}_1}{\tilde{a}_0-2\tilde{a}_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = \frac{\tilde{a}_0^2-2\tilde{a}_0\tilde{a}_1-\tilde{a}_0^2+4\tilde{a}_0\tilde{a}_1}{\tilde{a}_0-2\tilde{a}_1} \\ \gamma = \frac{\tilde{a}_0-4\tilde{a}_1}{\tilde{a}_0-2\tilde{a}_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = \frac{2\tilde{a}_0\tilde{a}_1}{\tilde{a}_0-2\tilde{a}_1} \\ \gamma = \frac{\tilde{a}_0-4\tilde{a}_1}{\tilde{a}_0-2\tilde{a}_1} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \delta = \frac{2\tilde{a}_0\tilde{a}_1}{\tilde{a}_0-2\tilde{a}_1} \\ \gamma = \frac{2\tilde{a}_0-\tilde{a}_0-4\tilde{a}_1}{\tilde{a}_0-2\tilde{a}_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = \frac{2\tilde{a}_0\tilde{a}_1}{\tilde{a}_0-2\tilde{a}_1} \\ \gamma = \frac{2\tilde{a}_0-4\tilde{a}_1}{\tilde{a}_0-2\tilde{a}_1} - \frac{\tilde{a}_0}{\tilde{a}_0-2\tilde{a}_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = \frac{2\tilde{a}_0\tilde{a}_1}{\tilde{a}_0-2\tilde{a}_1} \\ \gamma = 2 - \frac{\tilde{a}_0}{\tilde{a}_0-2\tilde{a}_1} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Assim, os estimadores dos momentos probabilisticamente ponderados são dados por

$$\begin{cases} \hat{\delta} = \frac{2\tilde{a}_0\tilde{a}_1}{\tilde{a}_0-2\tilde{a}_1} \\ \hat{\gamma} = 2 - \frac{\tilde{a}_0}{\tilde{a}_0-2\tilde{a}_1} \end{cases}.$$

Método da Máxima Verosimilhança

O método da máxima verosimilhança é, provavelmente, a técnica mais popular para deduzir estimadores. Consideremos uma amostra aleatória $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ i.i.d. com f.d.p. $f(x; \Theta)$, onde $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ é o vector de parâmetros desconhecidos. Então a função de verosimilhança dessa amostra será

$$\mathcal{L}(\Theta; \mathbf{x}) = \mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p; x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \Theta).$$

Definição 3. Para cada ponto amostral \mathbf{x} , seja $\hat{\Theta}(\mathbf{x})$ o(s) valor(es) do(s) parâmetro(s) para o(s) qual(quais) $\mathcal{L}(\Theta; \mathbf{x})$ atinge o seu máximo como função de Θ com \mathbf{x} fixo. Então o(s) estimador(es) de máxima verosimilhança do(s) parâmetro(s) do conjunto Θ baseado(s) na amostra \mathbf{X} é(são) dado(s) por $\hat{\Theta}(\mathbf{X})$.

Sendo assim, para obter estes estimadores para os parâmetros da Pareto Generalizada, apenas temos que maximizar a sua função de verosimilhança. Para isso vamos escrever, em primeiro lugar, a função de verosimilhança e depois vamos calcular a(s) sua(s) derivada(s) em ordem a Θ e igualar a zero. Tal como é habitual, no caso da distribuição Pareto Generalizada vamos trabalhar com a função de log-verosimilhança, definida por $\mathcal{L}^*(\Theta; \mathbf{x}) = \ln \mathcal{L}(\Theta; \mathbf{x})$, pois torna-se mais fácil. É óbvio que isto em nada altera o nosso problema, porque o logaritmo é uma função crescente. Portanto maximizar a função de verosimilhança ou maximizar a função de log-verosimilhança são procedimentos que conduzem ao mesmo resultado. Logo, para $\Theta = (\delta, \gamma)$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\Theta; \mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^n GP_{\gamma}(x_i; \Theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\delta} \left(1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} = \frac{1}{\delta^n} \prod_{i=1}^n \left(1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} \\
\Rightarrow \mathcal{L}^*(\Theta; \mathbf{x}) &= \ln \left(\frac{1}{\delta^n} \prod_{i=1}^n \left(1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} \right) = \ln \left(\frac{1}{\delta^n} \right) + \ln \left(\prod_{i=1}^n \left(1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} \right) \\
&= -n \ln(\delta) - \left(\frac{1}{\gamma} + 1 \right) \ln \left(\prod_{i=1}^n \left(1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}\right) \right) = -n \ln(\delta) - \left(\frac{1}{\gamma} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \gamma \frac{x_i}{\delta} \right).
\end{aligned}$$

Derivando em ordem a γ e a δ vem

$$\frac{\partial \mathfrak{L}^*(\Theta; \mathbf{x})}{\partial \delta} = -\frac{n}{\delta} + \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \sum_{i=1}^n \frac{\gamma \frac{x_i}{\delta^2}}{1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}^*(\Theta; \mathbf{x})}{\partial \gamma} = -\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \sum_{i=1}^n \frac{\frac{x_i}{\delta}}{1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}} + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}\right).$$

Igualando, agora, estas duas últimas expressões a zero, e resolvendo-as para γ e δ vem

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -\frac{n}{\delta} + \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \sum_{i=1}^n \frac{\gamma \frac{x_i}{\delta^2}}{1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}} = 0 \\ -\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \sum_{i=1}^n \frac{\frac{x_i}{\delta}}{1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}} + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}\right) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{1+\gamma}{\gamma} \sum_{i=1}^n \frac{\gamma \frac{x_i}{\delta^2}}{1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}} = \frac{n}{\delta} \\ -\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \sum_{i=1}^n \frac{\frac{x_i}{\delta}}{1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}} + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}\right) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{1+\gamma}{\gamma} \frac{\gamma}{\delta} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{x_i}{\delta}}{1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}} = \frac{n}{\delta} \\ -\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \sum_{i=1}^n \frac{\frac{x_i}{\delta}}{1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}} + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}\right) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{x_i}{\delta}}{1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}} = \frac{n}{\delta} \frac{\delta}{1+\gamma} \\ -\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \sum_{i=1}^n \frac{\frac{x_i}{\delta}}{1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}} + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}\right) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{x_i}{\delta}}{1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}} = \frac{n}{1+\gamma} \\ -\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \frac{n}{1+\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}\right) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{x_i}{\delta}}{1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}} = \frac{n}{1+\gamma} \\ -\frac{1+\gamma}{\gamma} \frac{n}{1+\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{x_i}{\delta}}{1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}} = \frac{n}{1+\gamma} \\ \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}\right) = \frac{n}{\gamma} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{x_i}{\delta}}{1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}} = \frac{n}{1+\gamma} \\ \gamma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{x_i}{\delta}}{1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}} = \frac{n}{1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}\right)} \\ \gamma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}\right) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}} \left(1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}\right)\right) \\ \gamma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \gamma \frac{x_i}{\delta}\right). \end{cases} \end{aligned}$$

Finalmente os estimadores de máxima verosimilhança são

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 + \hat{\gamma} \frac{x_i}{\delta}} \left(1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \hat{\gamma} \frac{x_i}{\delta}\right)\right) \\ \hat{\gamma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \hat{\gamma} \frac{x_i}{\delta}\right). \end{cases}$$

Como se pode constatar, este método, ao contrário dos outros dois, não nos fornece estimadores de cálculo imediato, isto é, tanto o estimador de γ como o de δ dependem de si próprios. Assim, na prática, para encontrar as estimativas dos parâmetros da Pareto Generalizada temos que recorrer a um ou a vários métodos numéricos, como por exemplo, o de Newton-Raphson modificado (para mais detalhes veja-se Grimshaw (1993)). No entanto, existem funções no *software* R, como por exemplo a função “optim”, que implementa esses métodos.

Observação 9. *Note-se que os estimadores anteriormente apresentados para os três métodos são relativos ao caso $\gamma \neq 0$. Para $\gamma = 0$, ou seja, para a distribuição Exponencial de valor médio δ os três métodos acima descritos (ME, PWME e MLE) coincidem entre si, originando o estimador $\hat{\delta} = \bar{X}$.*

Simulações efectuadas por Hosking & Wallis (1987) mostram que os estimadores com menor Erro Quadrático Médio são os estimadores dos momentos, quando $\gamma < 0$ e os estimadores dos momentos probabilisticamente ponderados quando $\gamma > 0.2$, enquanto que este último método fornece sempre os estimadores com menor viés.

Para finalizar esta Secção, apresentamos uma imagem retirada de Johnson *et al.* (1994), onde se pode avaliar a eficiência assintótica dos estimadores dos momentos e dos momentos probabilisticamente ponderados do parâmetro de forma γ , relativamente ao de máxima verosimilhança.

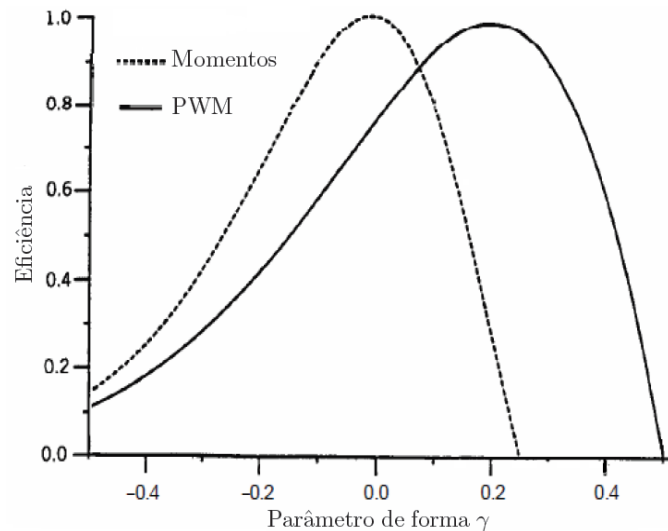


Figura 4.1: Eficiência assintótica de ME e PWME do parâmetro de forma γ da Pareto Generalizada, relativamente a MLE.

4.2 Generalizada de Valores Extremos

Nesta Secção, em vez de usarmos a expressão (1.2), vamos trabalhar com a f.d. seguinte

$$G_\gamma(x; \xi, \delta) = \begin{cases} e^{-(1+\gamma\frac{x-\xi}{\delta})^{-\frac{1}{\gamma}}}, & 1 + \gamma\frac{x-\xi}{\delta} > 0 \quad \text{se } \gamma \neq 0 \\ e^{-e^{-\frac{x-\xi}{\delta}}}, & x \in \mathbb{R} \quad \text{se } \gamma = 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

e a respectiva f.d.p, dada por

$$g_\gamma(x; \xi, \delta) = \begin{cases} e^{-(1+\gamma\frac{x-\xi}{\delta})^{-\frac{1}{\gamma}}} \left(1 + \gamma\frac{x-\xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} \frac{1}{\delta}, & 1 + \gamma\frac{x-\xi}{\delta} > 0 \quad \text{se } \gamma \neq 0 \\ e^{-e^{-\frac{x-\xi}{\delta}}} e^{-\frac{x-\xi}{\delta}} \frac{1}{\delta}, & x \in \mathbb{R} \quad \text{se } \gamma = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Ou seja, tudo o que dissermos abaixo, diz respeito à Generalizada de Valores Extremos com parâmetro de forma γ , parâmetro de escala δ e o parâmetro de localização ξ , i.e., ao modelo $G_\gamma(x; \xi, \delta) = G_\gamma(\frac{x-\xi}{\delta})$, com $G_\gamma(x)$ definida em (1.2).

O suporte desta distribuição também varia conforme o valor de γ se altera. Ora, se $\gamma < 0$, então $-\infty < x < \xi - \frac{\delta}{\gamma}$. Caso se tenha $\gamma > 0$, vem $\xi - \frac{\delta}{\gamma} < x < +\infty$.

Embora também seja usual trabalhar-se com a distribuição $G_\gamma(x)$ preferimos trabalhar com $G_\gamma(x; \xi, \delta)$, pois todas as medidas que obtivermos para $G_\gamma(x; \xi, \delta)$ são facilmente convertidas para $G_\gamma(x)$, fazendo $\xi = 0$ e $\delta = 1$.

4.2.1 Momentos da Distribuição Generalizada de Valores Extremos

Nesta Secção não iremos apresentar uma expressão explícita para os momentos de diversas ordens. Vamos sim proceder ao cálculo do momento de determinada ordem sempre que necessário.

Teorema 3. *Seja X uma variável aleatória onde $X \sim G_\gamma(x; \xi, \delta)$. Então X tem valor médio dado por*

$$\mu := \mathbb{E}[X] = \begin{cases} \frac{\delta}{\gamma} \Gamma(1 - \gamma) + \xi - \frac{\delta}{\gamma} & \text{se } \gamma \neq 0 \wedge \gamma < 1 \\ \xi - \delta \Psi(1) & \text{se } \gamma = 0, \end{cases}$$

onde $\Gamma(p) := \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$ e $\Psi(p) := \frac{d}{dp} \ln \Gamma(p) = \frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)}$ são respectivamente a função Gama e Digama.

Demonstração. Vamos começar pelo caso em que $\gamma > 0$. Ora, pela definição de valor médio e pela expressão (4.7) vem que

$$\mathbb{E}[X] := \int_{\xi - \frac{\delta}{\gamma}}^\infty x g_\gamma(x; \xi, \delta) dx = \int_{\xi - \frac{\delta}{\gamma}}^\infty x e^{-(1+\gamma\frac{x-\xi}{\delta})^{-\frac{1}{\gamma}}} \left(1 + \gamma\frac{x-\xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} \frac{1}{\delta} dx.$$

Fazendo a substituição $y = \left(1 + \gamma \frac{x-\xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow x = \frac{\delta}{\gamma}(y^{-\gamma} - 1) + \xi \Rightarrow dx = -\delta y^{-\gamma-1} dy$, vamos obter

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= - \int_{\infty}^0 \left(\frac{\delta}{\gamma}(y^{-\gamma} - 1) + \xi\right) e^{-y} y^{1+\gamma} \frac{1}{\delta} \delta y^{-\gamma-1} dy \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{\delta}{\gamma}(y^{-\gamma} - 1) + \xi\right) e^{-y} dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\delta}{\gamma} e^{-y} y^{-\gamma} dy + \int_0^{\infty} \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma}\right) e^{-y} dy \\ &= \frac{\delta}{\gamma} \int_0^{\infty} y^{-\gamma} e^{-y} dy + \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma}\right) \int_0^{\infty} e^{-y} dy \\ &= \frac{\delta}{\gamma} \Gamma(1-\gamma) + \xi - \frac{\delta}{\gamma}, \quad \text{para } 0 < \gamma < 1.\end{aligned}$$

Quando $\gamma < 0$ vem

$$\mathbb{E}[X] := \int_{-\infty}^{\xi - \frac{\delta}{\gamma}} x g_{\gamma}(x; \xi, \delta) dx = \int_{-\infty}^{\xi - \frac{\delta}{\gamma}} x e^{-\left(1 + \gamma \frac{x-\xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}} \left(1 + \gamma \frac{x-\xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} \frac{1}{\delta} dx.$$

Fazendo novamente a substituição $y = \left(1 + \gamma \frac{x-\xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow x = \frac{\delta}{\gamma}(y^{-\gamma} - 1) + \xi \Rightarrow dx = -\delta y^{-\gamma-1} dy$, vamos obter

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= - \int_{\infty}^0 \left(\frac{\delta}{\gamma}(y^{-\gamma} - 1) + \xi\right) e^{-y} y^{1+\gamma} \frac{1}{\delta} \delta y^{-\gamma-1} dy \\ &= \dots = \frac{\delta}{\gamma} \Gamma(1-\gamma) + \xi - \frac{\delta}{\gamma}, \quad \text{para } \gamma < 0.\end{aligned}$$

Resta mostrar o caso em que $\gamma = 0$.

$$\mathbb{E}[X] := \int_{\mathbb{R}} x g_{\gamma}(x; \xi, \delta) dx = \int_{\mathbb{R}} x e^{-e^{-\frac{x-\xi}{\delta}}} e^{-\frac{x-\xi}{\delta}} \frac{1}{\delta} dx.$$

Fazendo agora a substituição $y = e^{-\frac{x-\xi}{\delta}} \Rightarrow x = \xi - \delta \ln(y) \Rightarrow dx = -\frac{\delta}{y} dy$, vamos obter

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= - \int_{\infty}^0 (\xi - \delta \ln(y)) e^{-y} y \frac{1}{\delta} \frac{\delta}{y} dy = \int_0^{\infty} (\xi - \delta \ln(y)) e^{-y} dy \\ &= \underbrace{\xi \int_0^{\infty} e^{-y} dy}_{=1} - \delta \underbrace{\int_0^{\infty} \ln(y) e^{-y} dy}_{=\Gamma'(1), \text{ ver Obs. 10}} = \xi - \delta \Gamma'(1) = \xi - \delta \Psi(1).\end{aligned}$$

□

Observação 10. Tem-se que

$$\begin{aligned}\Gamma'(p) &= \frac{d}{dp} \Gamma(p) = \frac{d}{dp} \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{d}{dp} x^{p-1} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{d}{dp} e^{\ln(x)(p-1)} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{d}{dp} e^{(p-1) \ln(x)} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \ln(x) e^{(p-1) \ln(x)} dx = \int_0^{\infty} \ln(x) x^{p-1} e^{-x} dx.\end{aligned}$$

Observação 11 (Cálculo de $\Gamma'(1)$).

$$\Psi(p) = \frac{d}{dp} \ln(\Gamma(p)) = \frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} \Rightarrow \Psi(1) := -c = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \frac{\Gamma'(1)}{1} = \Gamma'(1),$$

onde $c = 0,5772156649$ é a constante de Euler-Mascheroni.

Em seguida vamos passar ao cálculo da variância.

Teorema 4. *Seja X uma variável aleatória nas mesmas condições do Teorema 3. Então X tem variância dada por*

$$\sigma^2 := \text{Var}[X] = \begin{cases} \frac{\delta^2}{\gamma^2} \left(\Gamma(1-2\gamma) - (\Gamma(1-\gamma))^2 \right) & \text{se } \gamma \neq 0 \wedge \gamma < \frac{1}{2} \\ \delta^2 \left(\Gamma''(1) - (\Gamma'(1))^2 \right) & \text{se } \gamma = 0, \end{cases}$$

onde $\Gamma(p)$, $\Gamma'(p)$ e $\Gamma''(p)$ são respectivamente a função Gama, a sua 1ª derivada e a sua 2ª derivada.

Demonstração. Começaremos pelo cálculo dos momentos de 2ª ordem. Quando $\gamma > 0$ vem

$$\mathbb{E}[X^2] := \int_{\xi - \frac{\delta}{\gamma}}^{\infty} x^2 g_{\gamma}(x; \xi, \delta) dx = \int_{\xi - \frac{\delta}{\gamma}}^{\infty} x^2 e^{-\left(1 + \gamma \frac{x - \xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}} \left(1 + \gamma \frac{x - \xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma} - 1} \frac{1}{\delta} dx.$$

Fazendo a substituição $y = \left(1 + \gamma \frac{x - \xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow x = \frac{\delta}{\gamma}(y^{-\gamma} - 1) + \xi \Rightarrow dx = -\delta y^{-\gamma - 1} dy$, vamos obter

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= - \int_{\infty}^0 \left(\frac{\delta}{\gamma}(y^{-\gamma} - 1) + \xi \right)^2 e^{-y} y^{1+\gamma} \frac{1}{\delta} \delta y^{-\gamma - 1} dy \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{\delta}{\gamma}(y^{-\gamma} - 1) + \xi \right)^2 e^{-y} dy \\ &= \int_0^{\infty} \left(\left(\frac{\delta}{\gamma} y^{-\gamma} \right)^2 + 2 \frac{\delta}{\gamma} y^{-\gamma} \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right) + \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right)^2 \right) e^{-y} dy \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{\delta}{\gamma} \right)^2 e^{-y} y^{-2\gamma} dy + \int_0^{\infty} 2 \frac{\delta}{\gamma} y^{-\gamma} \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right) e^{-y} dy + \int_0^{\infty} \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right)^2 e^{-y} dy \\ &= \left(\frac{\delta}{\gamma} \right)^2 \int_0^{\infty} y^{-2\gamma} e^{-y} dy + 2 \frac{\delta}{\gamma} \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right) \int_0^{\infty} y^{-\gamma} e^{-y} dy + \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right)^2 \int_0^{\infty} e^{-y} dy \\ &= \left(\frac{\delta}{\gamma} \right)^2 \Gamma(1-2\gamma) + 2 \frac{\delta}{\gamma} \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right) \Gamma(1-\gamma) + \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right)^2, \quad \text{para } 0 < \gamma < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Quando $\gamma < 0$ vem

$$\mathbb{E}[X^2] := \int_{-\infty}^{\xi - \frac{\delta}{\gamma}} x^2 g_{\gamma}(x; \xi, \delta) dx = \int_{-\infty}^{\xi - \frac{\delta}{\gamma}} x^2 e^{-\left(1 + \gamma \frac{x - \xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}} \left(1 + \gamma \frac{x - \xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma} - 1} \frac{1}{\delta} dx.$$

Procedendo à mesma substituição que para o caso $\gamma > 0$, vamos obter

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= - \int_{\infty}^0 \left(\frac{\delta}{\gamma} (y^{-\gamma} - 1) + \xi \right)^2 e^{-y} y^{1+\gamma} \frac{1}{\delta} dy \\ &= \dots = \left(\frac{\delta}{\gamma} \right)^2 \Gamma(1 - 2\gamma) + 2 \frac{\delta}{\gamma} \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right) \Gamma(1 - \gamma) + \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right)^2, \quad \text{para } \gamma < 0.\end{aligned}$$

Para $\gamma = 0$ tem-se

$$\mathbb{E}[X^2] := \int_{\mathbb{R}} x^2 g_{\gamma}(x; \xi, \delta) dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-e^{-\frac{x-\xi}{\delta}}} e^{-\frac{x-\xi}{\delta}} \frac{1}{\delta} dx.$$

Fazendo agora a substituição $y = e^{-\frac{x-\xi}{\delta}} \Rightarrow x = \xi - \delta \ln(y) \Rightarrow dx = -\frac{\delta}{y} dy$, vamos obter

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= - \int_{\infty}^0 \left(\xi - \delta \ln(y) \right)^2 e^{-y} y \frac{1}{\delta} dy = \int_0^{\infty} \left(\xi - \delta \ln(y) \right)^2 e^{-y} dy \\ &= \int_0^{\infty} \left(\xi^2 - 2\xi\delta \ln(y) + (\delta \ln(y))^2 \right) e^{-y} dy \\ &= \underbrace{\xi^2 \int_0^{\infty} e^{-y} dy}_{=1} - 2\xi\delta \underbrace{\int_0^{\infty} \ln(y) e^{-y} dy}_{=\Gamma'(1), \text{ ver Obs. 10}} + \delta^2 \underbrace{\int_0^{\infty} (\ln(y))^2 e^{-y} dy}_{=\Gamma''(1), \text{ ver Obs. 12}} \\ &= \xi^2 - 2\xi\delta\Gamma'(1) + \delta^2\Gamma''(1).\end{aligned}$$

Agora que já temos os momentos de 2ª ordem, usando o Teorema 3 e o Teorema de König, podemos calcular a variância para os dois casos.

$$\begin{aligned}\gamma \neq 0 : \text{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \\ &= \left(\frac{\delta}{\gamma} \right)^2 \Gamma(1 - 2\gamma) + 2 \frac{\delta}{\gamma} \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right) \Gamma(1 - \gamma) + \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right)^2 - \left(\frac{\delta}{\gamma} \Gamma(1 - \gamma) + \xi - \frac{\delta}{\gamma} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\delta}{\gamma} \right)^2 \Gamma(1 - 2\gamma) + 2 \frac{\delta}{\gamma} \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right) \Gamma(1 - \gamma) + \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right)^2 \\ &\quad - \left(\frac{\delta}{\gamma} \right)^2 \Gamma^2(1 - \gamma) - 2 \frac{\delta}{\gamma} \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right) \Gamma(1 - \gamma) - \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\delta}{\gamma} \right)^2 \Gamma(1 - 2\gamma) - \left(\frac{\delta}{\gamma} \right)^2 \Gamma^2(1 - \gamma) = \left(\frac{\delta}{\gamma} \right)^2 \left(\Gamma(1 - 2\gamma) - \Gamma^2(1 - \gamma) \right), \quad \text{para } \gamma < \frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma = 0 : \text{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \xi^2 - 2\xi\delta\Gamma'(1) + \delta^2\Gamma''(1) - (\xi - \delta\Gamma'(1))^2 \\ &= \xi^2 - 2\xi\delta\Gamma'(1) + \delta^2\Gamma''(1) - \xi^2 + 2\xi\delta\Gamma'(1) - \delta^2(\Gamma'(1))^2 = \delta^2(\Gamma''(1) - (\Gamma'(1))^2).\end{aligned}$$

□

Observação 12. *Tem-se que*

$$\begin{aligned}\Gamma''(p) &= \frac{d^2}{dp^2}\Gamma(p) = \frac{d}{dp}\left(\frac{d}{dp}\Gamma(p)\right) = \frac{d}{dp}\Gamma'(p) = \frac{d}{dp}\int_0^\infty e^{-x}\ln(x)e^{(p-1)\ln(x)}dx \\ &= \int_0^\infty e^{-x}\ln(x)\frac{d}{dp}e^{(p-1)\ln(x)}dx = \int_0^\infty e^{-x}(\ln(x))^2e^{\ln(x^{p-1})}dx = \int_0^\infty (\ln(x))^2x^{p-1}e^{-x}dx.\end{aligned}$$

Observação 13 (Cálculo de $\Gamma''(1)$). *Seja $\Psi'(p)$ a função Trigama definida por*

$$\Psi'(p) = \frac{d}{dp}\Psi(p) = \frac{d}{dp}\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} = \frac{\Gamma''(p)\Gamma(p) - \Gamma'(p)\Gamma'(p)}{\Gamma^2(p)} = \frac{\Gamma''(p)}{\Gamma(p)} - \frac{(\Gamma'(p))^2}{\Gamma^2(p)} = \frac{\Gamma''(p)}{\Gamma(p)} - \Psi^2(p).$$

Então

$$\Psi(1) := \frac{\pi^2}{6} = \frac{\Gamma''(1)}{\Gamma(1)} - \Psi^2(1) = \frac{\Gamma''(1)}{1} - c^2 = \Gamma''(1) - c^2 \Rightarrow \Gamma''(1) = \frac{\pi^2}{6} + c^2,$$

onde c é a constante de Euler-Mascheroni já mencionada na Observação 11.

A Proposição seguinte diz-nos quais os valores da assimetria e do achatamento para a Generalizada de Valores Extremos. Relembramos que estes coeficientes já foram referidos na Secção 4.1.1, e portanto não os iremos definir novamente.

Proposição 4. *Considerando X nas mesmas condições dos dois Teoremas anteriores, tem-se*

$$\sqrt{\beta_1} = \begin{cases} \frac{\Gamma(1-3\gamma)+\Gamma(1-\gamma)(2\Gamma^2(1-\gamma)-3\Gamma(1-2\gamma))}{(\Gamma(1-2\gamma)-\Gamma^2(1-\gamma))^{\frac{3}{2}}} & \text{se } \gamma \neq 0 \wedge \gamma < \frac{1}{3} \\ \frac{\Gamma'(1)(3\Gamma''(1)-2(\Gamma'(1))^2)-\Gamma'''(1)}{(\Gamma''(1)-(\Gamma'(1))^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{se } \gamma = 0, \end{cases}$$

e

$$\beta_2 = \begin{cases} \frac{\Gamma(1-4\gamma)+\Gamma(1-\gamma)(6\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1-2\gamma)-4\Gamma(1-3\gamma)-3\Gamma^3(1-\gamma))}{(\Gamma(1-2\gamma)-\Gamma^2(1-\gamma))^2} & \text{se } \gamma \neq 0 \wedge \gamma < \frac{1}{4} \\ \frac{\Gamma''''(1)-\Gamma'(1)(4\Gamma'''(1)-6\Gamma'(1)\Gamma''(1)+3(\Gamma'(1))^3)}{(\Gamma''(1)-(\Gamma'(1))^2)^2} & \text{se } \gamma = 0. \end{cases}$$

Demonstração. Efectuando o mesmo processo que nos momentos de 1^a e 2^a ordens, presentes respectivamente nos Teoremas 3 e 4, sai analogamente que

$$\mathbb{E}[X^3] = \begin{cases} \frac{\delta^3}{\gamma^3}\Gamma(1-3\gamma) + 3\frac{\delta^2}{\gamma^2}\left(\xi - \frac{\delta}{\gamma}\right)\Gamma(1-2\gamma) + \\ + 3\frac{\delta}{\gamma}\left(\xi - \frac{\delta}{\gamma}\right)^2\Gamma(1-\gamma) + \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma}\right)^3 & \text{se } \gamma \neq 0 \wedge \gamma < \frac{1}{3} \\ \xi^3 - 3\xi^2\delta\Gamma'(1) + 3\xi\delta^2\Gamma''(1) - \delta^3\Gamma'''(1) & \text{se } \gamma = 0, \end{cases}$$

e

$$\mathbb{E}[X^4] = \begin{cases} \frac{\delta^4}{\gamma^4}\Gamma(1-4\gamma) + \frac{\delta^3}{\gamma^3}\left(\xi - \frac{\delta}{\gamma}\right)\Gamma(1-3\gamma) + 6\frac{\delta^2}{\gamma^2}\left(\xi - \frac{\delta}{\gamma}\right)^2 \times \\ \times \Gamma(1-2\gamma) + 4\frac{\delta}{\gamma}\left(\xi - \frac{\delta}{\gamma}\right)^3\Gamma(1-\gamma) + \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma}\right)^4 & \text{se } \gamma \neq 0 \wedge \gamma < \frac{1}{4} \\ \xi^4 - 4\xi^3\delta\Gamma'(1) + 6\xi^2\delta^2\Gamma''(1) - 4\xi\delta^3\Gamma'''(1) + \delta^4\Gamma''''(1) & \text{se } \gamma = 0. \end{cases}$$

Recordemos que o terceiro momento standardizado é dado por

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{\mathbb{E}[X^3] - 3\mu\mathbb{E}[X^2] + 2\mu^3}{\sigma^3},$$

e que para o quarto momento standardizado, vem

$$\beta_2 = \frac{\mathbb{E}[X^4] - 4\mu\mathbb{E}[X^3] + 6\mu^2\mathbb{E}[X^2] - 3\mu^4}{\sigma^4},$$

onde $\mu = \mathbb{E}[X]$ e $\sigma = \sqrt{\text{Var}[X]}$.

Vamos começar pela assimetria. Assim quando $\gamma \neq 0$ tem-se

$$\begin{aligned} \sigma^3\sqrt{\beta_1} &= \mathbb{E}[X^3] - 3\mu\mathbb{E}[X^2] + 2\mu^3 \\ &= \frac{\delta^3}{\gamma^3}\Gamma(1-3\gamma) + 3\frac{\delta^2}{\gamma^2}\left(\xi - \frac{\delta}{\gamma}\right)\Gamma(1-2\gamma) + 3\frac{\delta}{\gamma}\left(\xi - \frac{\delta}{\gamma}\right)^2\Gamma(1-\gamma) + \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma}\right)^3 \\ &\quad - 3\left(\frac{\delta}{\gamma}\Gamma(1-\gamma) + \xi - \frac{\delta}{\gamma}\right)\left(\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^2\Gamma(1-2\gamma) + 2\frac{\delta}{\gamma}\left(\xi - \frac{\delta}{\gamma}\right)\Gamma(1-\gamma) + \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma}\right)^2\right) \\ &\quad + 2\left(\frac{\delta}{\gamma}\Gamma(1-\gamma) + \xi - \frac{\delta}{\gamma}\right)^3 = \dots = \frac{\delta^3}{\gamma^3}\left(\Gamma(1-3\gamma) + \Gamma(1-\gamma)(2\Gamma^2(1-\gamma) - 3\Gamma(1-2\gamma))\right), \end{aligned}$$

o que vai resultar em,

$$\begin{aligned} \sqrt{\beta_1} &= \frac{\frac{\delta^3}{\gamma^3}\left(\Gamma(1-3\gamma) + \Gamma(1-\gamma)(2\Gamma^2(1-\gamma) - 3\Gamma(1-2\gamma))\right)}{\left(\sqrt{\frac{\delta^2}{\gamma^2}\left(\Gamma(1-2\gamma) - (\Gamma(1-\gamma))^2\right)}\right)^3} \\ &= \frac{\Gamma(1-3\gamma) + \Gamma(1-\gamma)(2\Gamma^2(1-\gamma) - 3\Gamma(1-2\gamma))}{(\Gamma(1-2\gamma) - \Gamma^2(1-\gamma))^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Para $\gamma = 0$ vem

$$\begin{aligned} \sigma^3\sqrt{\beta_1} &= \xi^3 - 3\xi^2\delta\Gamma'(1) + 3\xi\delta^2\Gamma''(1) - \delta^3\Gamma'''(1) - 3(\xi - \delta\Gamma'(1))(\xi^2 - 2\xi\delta\Gamma'(1) + \delta^2\Gamma''(1)) \\ &\quad + 2(\xi - \delta\Gamma'(1))^3 = \dots = \delta^3\left(\Gamma'(1)(3\Gamma''(1) - 2(\Gamma'(1))^2) - \Gamma'''(1)\right). \end{aligned}$$

Ora isto implica que,

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{\delta^3 \left(\Gamma'(1) \left(3\Gamma''(1) - 2(\Gamma'(1))^2 \right) - \Gamma'''(1) \right)}{\left(\sqrt{\delta^2 \left(\Gamma''(1) - (\Gamma'(1))^2 \right)} \right)^3} = \frac{\Gamma'(1) \left(3\Gamma''(1) - 2(\Gamma'(1))^2 \right) - \Gamma'''(1)}{\left(\Gamma''(1) - (\Gamma'(1))^2 \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Passando agora ao achatamento, tem-se, para $\gamma \neq 0$,

$$\begin{aligned} \sigma^4 \beta_2 &= \mathbb{E} [X^4] - 4\mu \mathbb{E} [X^3] + 6\mu^2 \mathbb{E} [X^2] - 3\mu^4 = \frac{\delta^4}{\gamma^4} \Gamma(1 - 4\gamma) + 4\frac{\delta^3}{\gamma^3} \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right) \\ &\quad \times \Gamma(1 - 3\gamma) + 6\frac{\delta^2}{\gamma^2} \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right)^2 \Gamma(1 - 2\gamma) + 4\frac{\delta}{\gamma} \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right)^3 \Gamma(1 - \gamma) + \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right)^4 \\ &\quad - 4 \left(\frac{\delta}{\gamma} \Gamma(1 - \gamma) + \xi - \frac{\delta}{\gamma} \right) \left(\frac{\delta^3}{\gamma^3} \Gamma(1 - 3\gamma) + 3\frac{\delta^2}{\gamma^2} \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right) \Gamma(1 - 2\gamma) + 3\frac{\delta}{\gamma} \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right)^2 \right. \\ &\quad \times \Gamma(1 - \gamma) + \left. \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right)^3 \right) + 6 \left(\frac{\delta}{\gamma} \Gamma(1 - \gamma) + \xi - \frac{\delta}{\gamma} \right)^2 \left(\left(\frac{\delta}{\gamma} \right)^2 \Gamma(1 - 2\gamma) + 2\frac{\delta}{\gamma} \right. \\ &\quad \times \left. \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right) \Gamma(1 - \gamma) + \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right)^2 \right) - 3 \left(\frac{\delta}{\gamma} \Gamma(1 - \gamma) + \xi - \frac{\delta}{\gamma} \right)^4 \\ &= \dots = \frac{\delta^4}{\gamma^4} \left(\Gamma(1 - 4\gamma) + \Gamma(1 - \gamma) \left(6\Gamma(1 - \gamma) \Gamma(1 - 2\gamma) - 4\Gamma(1 - 3\gamma) - 3\Gamma^3(1 - \gamma) \right) \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{\frac{\delta^4}{\gamma^4} \left(\Gamma(1 - 4\gamma) + \Gamma(1 - \gamma) \left(6\Gamma(1 - \gamma) \Gamma(1 - 2\gamma) - 4\Gamma(1 - 3\gamma) - 3\Gamma^3(1 - \gamma) \right) \right)}{\left(\sqrt{\frac{\delta^2}{\gamma^2} \left(\Gamma(1 - 2\gamma) - (\Gamma(1 - \gamma))^2 \right)} \right)^3} \\ &= \frac{\Gamma(1 - 4\gamma) + \Gamma(1 - \gamma) \left(6\Gamma(1 - \gamma) \Gamma(1 - 2\gamma) - 4\Gamma(1 - 3\gamma) - 3\Gamma^3(1 - \gamma) \right)}{\left(\Gamma(1 - 2\gamma) - \Gamma^2(1 - \gamma) \right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Para $\gamma = 0$, vem

$$\begin{aligned} \sigma^4 \beta_2 &= \xi^4 - 4\xi^3 \delta \Gamma'(1) + 6\xi^2 \delta^2 \Gamma''(1) - 4\xi \delta^3 \Gamma'''(1) + \delta^4 \Gamma''''(1) \\ &\quad - 4 \left(\xi - \delta \Gamma'(1) \right) \left(\xi^3 - 3\xi^2 \delta \Gamma'(1) + 3\xi \delta^2 \Gamma''(1) - \delta^3 \Gamma'''(1) \right) \\ &\quad + 6 \left(\xi - \delta \Gamma'(1) \right)^2 \left(\xi^2 - 2\xi \delta \Gamma'(1) + \delta^2 \Gamma''(1) \right) - 3 \left(\xi - \delta \Gamma'(1) \right)^4 \\ &= \dots = \delta^4 \left(\Gamma''''(1) - \Gamma'(1) \left(4\Gamma'''(1) - 6\Gamma'(1) \Gamma''(1) + 3(\Gamma'(1))^3 \right) \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \frac{\delta^4 \left(\Gamma''''(1) - \Gamma'(1) \left(4\Gamma'''(1) - 6\Gamma'(1)\Gamma''(1) + 3(\Gamma'(1))^3 \right) \right)}{\left(\sqrt{\delta^2 \left(\Gamma''(1) - (\Gamma'(1))^2 \right)} \right)^4} \\ &= \frac{\Gamma''''(1) - \Gamma'(1) \left(4\Gamma'''(1) - 6\Gamma'(1)\Gamma''(1) + 3(\Gamma'(1))^3 \right)}{\left(\Gamma''(1) - (\Gamma'(1))^2 \right)^2}.\end{aligned}$$

□

Observação 14 (Cálculo de $\Gamma'''(1)$ e $\Gamma''''(1)$).

$$\Gamma'''(1) = \int_0^\infty (\ln(y))^3 e^{-y} dy \approx -5.44874, \quad \text{com um erro absoluto inferior a } 0.00026.$$

$$\Gamma''''(1) = \int_0^\infty (\ln(y))^4 e^{-y} dy \approx 23.56148, \quad \text{com um erro absoluto inferior a } 0.0016.$$

Referimos ainda que os valores acima apresentados, foram calculados no R.

4.2.2 Estimação dos Parâmetros Desconhecidos

Tal como na Secção 4.1.2, iremos nesta Secção proceder ao cálculo dos estimadores dos parâmetros da Generalizada de Valores Extremos. Iremos trabalhar novamente com os métodos: dos momentos, dos momentos probabilisticamente ponderados e da máxima verosimilhança.

Método dos Momentos

Para $\gamma \neq 0$, em virtude das demonstrações dos Teoremas 3 e 4, tem-se que:

$$k = 1 : \quad \mathbb{E}[X] = \frac{\delta}{\gamma} \Gamma(1 - \gamma) + \xi - \frac{\delta}{\gamma} = m'_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i =: \bar{X},$$

$$k = 2 : \quad \mathbb{E}[X^2] = \frac{\delta^2}{\gamma^2} \Gamma(1 - 2\gamma) + 2\frac{\delta}{\gamma} \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right) \Gamma(1 - \gamma) + \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right)^2 = m'_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2,$$

$$\begin{aligned}k = 3 : \quad \mathbb{E}[X^3] &= \frac{\delta^3}{\gamma^3} \Gamma(1 - 3\gamma) + 3\frac{\delta^2}{\gamma^2} \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right) \Gamma(1 - 2\gamma) + 3\frac{\delta}{\gamma} \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right)^2 \Gamma(1 - \gamma) + \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right)^3 \\ &= m'_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^3.\end{aligned}$$

Vamos em seguida resolver estas três últimas equações em ordem aos parâmetros. Começando pela primeira, vem

$$\frac{\delta}{\gamma}\Gamma(1-\gamma) + \xi - \frac{\delta}{\gamma} = \bar{X} \Rightarrow \xi = \bar{X} + \frac{\delta}{\gamma} - \frac{\delta}{\gamma}\Gamma(1-\gamma) = \bar{X} + \frac{\delta}{\gamma}(1-\Gamma(1-\gamma)). \quad (4.8)$$

Na segunda equação virá

$$\frac{\delta^2}{\gamma^2}\Gamma(1-2\gamma) + 2\frac{\delta}{\gamma}\left(\xi - \frac{\delta}{\gamma}\right)\Gamma(1-\gamma) + \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Recorrendo a (4.8) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2}{\gamma^2}\Gamma(1-2\gamma) + 2\frac{\delta}{\gamma}\left(\bar{X} - \frac{\delta}{\gamma}\Gamma(1-\gamma)\right)\Gamma(1-\gamma) + \left(\bar{X} - \frac{\delta}{\gamma}\Gamma(1-\gamma)\right)^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 \\ \Rightarrow \frac{\delta^2}{\gamma^2}\Gamma(1-2\gamma) - 2\frac{\delta^2}{\gamma^2}\Gamma^2(1-\gamma) + \bar{X}^2 + \frac{\delta^2}{\gamma^2}\Gamma^2(1-\gamma) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 \\ \Rightarrow \frac{\delta^2}{\gamma^2}\Gamma(1-2\gamma) - \frac{\delta^2}{\gamma^2}\Gamma^2(1-\gamma) &= \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \frac{n\bar{X}^2}{n}}_{=S^2} \\ \Rightarrow \frac{\delta^2}{\gamma^2}(\Gamma(1-2\gamma) - \Gamma^2(1-\gamma)) &= S^2 \Rightarrow \delta = \pm \sqrt{\frac{S^2\gamma^2}{\Gamma(1-2\gamma) - \Gamma^2(1-\gamma)}}. \end{aligned}$$

Como $\delta > 0$, tem-se que

$$\delta = \sqrt{\frac{S^2\gamma^2}{\Gamma(1-2\gamma) - \Gamma^2(1-\gamma)}} = \frac{S|\gamma|}{\sqrt{\Gamma(1-2\gamma) - \Gamma^2(1-\gamma)}}. \quad (4.9)$$

Finalmente para a terceira equação vem,

$$\frac{\delta^3}{\gamma^3}\Gamma(1-3\gamma) + 3\frac{\delta^2}{\gamma^2}\left(\xi - \frac{\delta}{\gamma}\right)\Gamma(1-2\gamma) + 3\frac{\delta}{\gamma}\left(\xi - \frac{\delta}{\gamma}\right)^2\Gamma(1-\gamma) + \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma}\right)^3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^3.$$

Usando a expressão (4.8) vem

$$\begin{aligned} &\frac{\delta^3}{\gamma^3}\Gamma(1-3\gamma) + 3\frac{\delta^2}{\gamma^2}\left(\bar{X} - \frac{\delta}{\gamma}\Gamma(1-\gamma)\right)\Gamma(1-2\gamma) \\ &+ 3\frac{\delta}{\gamma}\left(\bar{X} - \frac{\delta}{\gamma}\Gamma(1-\gamma)\right)^2\Gamma(1-\gamma) + \left(\bar{X} - \frac{\delta}{\gamma}\Gamma(1-\gamma)\right)^3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^3 \\ &\Rightarrow \frac{\delta^3}{\gamma^3}\Gamma(1-3\gamma) + 3\frac{\delta^2}{\gamma^2}\bar{X}\Gamma(1-2\gamma) - 3\frac{\delta^3}{\gamma^3}\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1-2\gamma) \\ &- 6\frac{\delta^2}{\gamma^2}\Gamma^2(1-\gamma)\bar{X} + 3\frac{\delta^3}{\gamma^3}\Gamma^3(1-\gamma) + \bar{X}^3 + 3\frac{\delta^2}{\gamma^2}\Gamma^2(1-\gamma)\bar{X} - \frac{\delta^3}{\gamma^3}\Gamma^3(1-\gamma) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{\delta^3}{\gamma^3} \Gamma(1-3\gamma) - 3 \frac{\delta^3}{\gamma^3} \Gamma(1-\gamma) \Gamma(1-2\gamma) + 2 \frac{\delta^3}{\gamma^3} \Gamma^3(1-\gamma) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^3 - 3 \frac{\delta^2}{\gamma^2} \bar{X} \Gamma(1-2\gamma) + 3 \frac{\delta^2}{\gamma^2} \Gamma^2(1-\gamma) \bar{X} - \bar{X}^3.
\end{aligned}$$

Pode-se ver pelos cálculos auxiliares da segunda equação, que $\frac{\delta^2}{\gamma^2} \Gamma(1-2\gamma) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}$ e $\frac{\delta^2}{\gamma^2} \Gamma^2(1-\gamma) = \frac{n\bar{X}^2}{n}$. Ora isto implica que, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^3 - 3 \frac{\delta^2}{\gamma^2} \bar{X} \Gamma(1-2\gamma) + 3 \frac{\delta^2}{\gamma^2} \Gamma^2(1-\gamma) \bar{X} - \bar{X}^3 = S^3 g_1$, onde $g_1 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^3}{S^3}$. Logo,

$$\frac{\delta^3}{\gamma^3} (\Gamma(1-3\gamma) - 3\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1-2\gamma) + 2\Gamma^3(1-\gamma)) = S^3 g_1.$$

Substituindo pela expressão (4.9) vem

$$\begin{aligned}
&\frac{S^3 |\gamma|^3}{\gamma^3 (\sqrt{\Gamma(1-2\gamma)} - \Gamma^2(1-\gamma))^3} (\Gamma(1-3\gamma) - 3\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1-2\gamma) + 2\Gamma^3(1-\gamma)) = S^3 g_1 \\
&\Rightarrow \frac{|\gamma|^3}{\gamma^3 (\sqrt{\Gamma(1-2\gamma)} - \Gamma^2(1-\gamma))^3} (\Gamma(1-3\gamma) - 3\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1-2\gamma) + 2\Gamma^3(1-\gamma)) = g_1 \\
&\Rightarrow \text{sgn}(\gamma) \frac{\Gamma(1-3\gamma) - 3\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1-2\gamma) + 2\Gamma^3(1-\gamma)}{(\sqrt{\Gamma(1-2\gamma)} - \Gamma^2(1-\gamma))^3} = g_1, \quad (4.10)
\end{aligned}$$

onde \bar{X} , S e g_1 são respectivamente, a média amostral, o desvio-padrão amostral e o coeficiente de assimetria amostral. A função sgn , presente na expressão (4.10), corresponde à função sinal que é dada por,

$$\text{sgn}(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Juntando as expressões (4.8), (4.9) e (4.10), vamos obter os estimadores dos momentos

$$\begin{cases} \hat{\xi} = \bar{X} + \frac{\hat{\delta}}{\hat{\gamma}} (1 - \Gamma(1 - \hat{\gamma})) \\ \hat{\delta} = \frac{\hat{\gamma} S}{\sqrt{\Gamma(1-2\hat{\gamma}) - \Gamma^2(1-\hat{\gamma})}} \\ g_1 = \text{sgn}(\hat{\gamma}) \frac{\Gamma(1-3\hat{\gamma}) - 3\Gamma(1-\hat{\gamma})\Gamma(1-2\hat{\gamma}) + 2\Gamma^3(1-\hat{\gamma})}{(\sqrt{\Gamma(1-2\hat{\gamma}) - \Gamma^2(1-\hat{\gamma})})^3}. \end{cases}$$

Já para $\gamma = 0$ virá

$$k = 1: \quad \mathbb{E}[X] = \xi - \delta \Psi(1) = m'_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i =: \bar{X},$$

$$k = 2: \quad \mathbb{E}[X^2] = \xi^2 - 2\xi\delta\Gamma'(1) + \delta^2\Gamma''(1) = m'_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2,$$

o que vai originar os seguintes estimadores

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \xi - \delta\Psi(1) = \bar{X} \\ \xi^2 - 2\xi\delta\Gamma'(1) + \delta^2\Gamma''(1) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = \bar{X} + \delta\Psi(1) \\ (\bar{X} + \delta\Psi(1))^2 - 2(\bar{X} + \delta\Psi(1))\delta\Gamma'(1) + \delta^2\Gamma''(1) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = \bar{X} + \delta\Psi(1) \\ \bar{X}^2 + \delta^2(\Gamma'(x))^2 - 2\delta^2(\Gamma'(x))^2 + \delta^2\Gamma''(1) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = \bar{X} + \delta\Psi(1) \\ \delta^2(\Gamma''(1) - (\Gamma'(1 - \gamma))^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{n\bar{X}^2}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = \bar{X} + \delta\Psi(1) \\ \delta^2 = \frac{S^2}{\Gamma''(1) - (\Gamma'(1 - \gamma))^2} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \xi - \delta\Psi(1) = \bar{X} \\ \delta = \frac{S}{\sqrt{\Gamma''(1) - (\Gamma'(1))^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = \bar{X} + \frac{S\Psi(1)}{\sqrt{\Gamma''(1) - (\Gamma'(1))^2}} \\ \delta = \frac{S}{\sqrt{\Gamma''(1) - (\Gamma'(1))^2}} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Pelas Observações 11 e 13, tem-se que os estimadores dos momentos são

$$\begin{cases} \hat{\xi} = \bar{X} - \frac{Sc}{\sqrt{\frac{\pi^2}{6} + c^2 - c^2}} \\ \hat{\delta} = \frac{S}{\sqrt{\frac{\pi^2}{6} + c^2 - c^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\xi} = \bar{X} - \frac{\sqrt{6}Sc}{\pi} \\ \hat{\delta} = \frac{\sqrt{6}S}{\pi}, \end{cases}$$

onde c é a constante de Euler-Mascheroni, S é o desvio-padrão amostral e \bar{X} é a média amostral.

Método dos Momentos Probabilisticamente Ponderados

Este método, que foi estudado em Hosking *et al.* (1985), usa novamente $M_{p, r, s}$, mas desta vez, será útil escrever esta medida de uma outra forma:

$$M_{p, r, s} = \mathbb{E} [X^p F_X^r(X) (1 - F_X(X))^s] = \int_{\mathbb{R}} x^p F^r(x) (1 - F(x))^s f(x) dx.$$

Fazendo a substituição $x = F^{-1}(y) \Rightarrow y = F(x) \Rightarrow dy = f(x)dx$ vem

$$M_{p, r, s} = \int_0^1 (F^{-1}(y))^p y^r (1 - y)^s dy.$$

Para além do caso especial apresentado na Secção 4.1.2, existe um outro caso, para esta medida, que é

$$\beta_r = M_{1, r, 0} = \mathbb{E} [X F_X^r(X)] = \int_0^1 F^{-1}(y) y^r dy.$$

Para uma amostra ordenada $(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})$, Landwehr *et al.* (1979), provaram que o estimador

$$b_r = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\binom{j-1}{r}}{\binom{n-1}{r}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(j-1)(j-2)\dots(j-r)}{(n-1)(n-2)\dots(n-r)} X_{j:n}$$

é centrado para β_r . Para além de b_r , existe ainda um outro estimador para β_r , que vamos denotar por \tilde{b}_r , dado pela seguinte expressão:

$$\tilde{b}_r = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p_{j:n}^r X_{j:n},$$

onde $p_{j:n}$ são as “plotting positions”. Hosking *et al.* (1985), apresentaram duas escolhas razoáveis para $p_{j:n}$. A primeira consiste em fazer $p_{j:n} = \frac{j-a}{n}$, para $0 < a < 1$, enquanto que para a segunda hipótese tem-se $p_{j:n} = \frac{j-a}{n+1-2a}$, para $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$. Os estimadores b_r e \tilde{b}_r são assintoticamente equivalentes. Ainda se pode dizer que estes dois estimadores são ambos consistentes para β_r .

Para $\gamma \neq 0$, tem-se $G_\gamma^{-1}(y; \xi, \delta) = \xi + \frac{\delta}{\gamma} \left((-\ln(y))^{-\gamma} - 1 \right)$. Logo,

$$\beta_r = M_{1, r, 0} = \int_0^1 G_\gamma^{-1}(y; \xi, \delta) y^r dy = \int_0^1 \left(\xi + \frac{\delta}{\gamma} \left((-\ln(y))^{-\gamma} - 1 \right) \right) y^r dy.$$

Substituindo $-\ln(y) = u \Rightarrow y = e^{-u} \rightarrow dy = -e^{-u} du$, vem

$$\begin{aligned} \beta_r &= \int_\infty^0 \left(\xi + \frac{\delta}{\gamma} (u^{-\gamma} - 1) \right) (e^{-u})^r (-e^{-u}) du = \int_0^\infty \left(\xi + \frac{\delta}{\gamma} (u^{-\gamma} - 1) \right) e^{-u(r+1)} du \\ &= \left(\xi - \frac{\delta}{\gamma} \right) \int_0^\infty e^{-u(r+1)} du + \frac{\delta}{\gamma} \int_0^\infty u^{-\gamma} e^{-u(r+1)} du = \frac{\xi - \frac{\delta}{\gamma}}{r+1} + \frac{\delta}{\gamma} \frac{\Gamma(1-\gamma)}{(r+1)^{1-\gamma}}, \quad \gamma < 1. \end{aligned}$$

Finalmente, vem o cálculo dos estimadores,

$$\begin{aligned} r = 0 : \quad M_{1, 0, 0} &= \frac{\gamma\xi + \delta(\Gamma(1-\gamma) - 1)}{\gamma} = \tilde{b}_0, \\ r = 1 : \quad M_{1, 1, 0} &= \frac{\gamma\xi 2^{-\gamma} + \delta(\Gamma(1-\gamma) - 2^{-\gamma})}{\gamma 2^{1-\gamma}} = \tilde{b}_1, \\ r = 2 : \quad M_{1, 2, 0} &= \frac{\gamma\xi 3^{-\gamma} + \delta(\Gamma(1-\gamma) - 3^{-\gamma})}{\gamma 3^{1-\gamma}} = \tilde{b}_2. \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\tilde{b}_0 = \frac{\gamma\xi + \delta(\Gamma(1-\gamma) - 1)}{\gamma}, \tag{4.11}$$

$$2\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0 = \frac{\delta\Gamma(1-\gamma)}{\gamma} \left(\frac{1}{2^{-\gamma}} - 1 \right), \quad (4.12)$$

$$\frac{3\tilde{b}_2 - \tilde{b}_0}{2\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0} = \frac{\frac{\delta\Gamma(1-\gamma)}{\gamma} \left(\frac{1}{3^{-\gamma}} - 1 \right)}{\frac{\delta\Gamma(1-\gamma)}{\gamma} \left(\frac{1}{2^{-\gamma}} - 1 \right)} = \frac{3^\gamma - 1}{2^\gamma - 1}. \quad (4.13)$$

Resolvendo (4.11), (4.12) e (4.13), em ordem a ξ , δ e γ vamos obter os estimadores pretendidos,

$$\hat{\xi} = \tilde{b}_0 - \frac{\hat{\delta}(\Gamma(1-\hat{\gamma}) - 1)}{\hat{\gamma}}, \quad (4.14)$$

$$\hat{\delta} = \frac{\hat{\gamma}(2\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0)}{\Gamma(1-\hat{\gamma})(2^{\hat{\gamma}} - 1)}. \quad (4.15)$$

Se pretendermos o valor de $\hat{\gamma}$ basta resolver a equação (4.13). Sabendo este valor, podemos, através da equação (4.15), obter $\hat{\delta}$. Por fim, utilizando a equação (4.14) chegamos a $\hat{\xi}$. Note-se que para encontrar o valor exacto de $\hat{\gamma}$, através de (4.13), necessitamos de métodos iterativos, mas como a função $\frac{3^\gamma - 1}{2^\gamma - 1}$ é praticamente linear em $-\frac{1}{2} < \gamma < \frac{1}{2}$, uma aproximação por um polinómio de grau baixo será bastante precisa. Desta forma Hosking *et al.* (1985) sugeriram para estimador de γ o seguinte polinómio de segundo grau,

$$\hat{\gamma} = -7.8590x - 2.9554x^2, \quad \text{onde} \quad x = \frac{2b_1 - b_0}{3b_2 - b_0} - \frac{\ln(2)}{\ln(3)}.$$

O erro obtido calculando $\hat{\gamma}$ desta forma, em relação à expressão (4.13), será inferior a 0.0009, no intervalo $-\frac{1}{2} < \gamma < \frac{1}{2}$.

Considerando agora $\gamma = 0$, tem-se $G_\gamma^{-1}(y; \xi, \delta) = \xi - \delta \left(\ln(-\ln(y)) \right)$. Logo

$$\beta_r = M_{1, r, 0} = \int_0^1 G_\gamma^{-1}(y; \xi, \delta) y^r dy = \int_0^1 \left(\xi - \delta \left(\ln(-\ln(y)) \right) \right) y^r dy.$$

Substituindo $-\ln(y) = u \Rightarrow y = e^{-u} \rightarrow dy = -e^{-u} du$, vem

$$\begin{aligned} \beta_r &= \int_\infty^0 \left(\xi - \delta \ln(u) \right) (e^{-u})^r (-e^{-u}) du = \int_0^\infty \left(\xi - \delta \ln(u) \right) e^{-u(r+1)} du \\ &= \frac{\xi}{r+1} - \delta \int_0^\infty \ln(u) e^{-u(r+1)} du = \underbrace{\dots}_{\text{ver Obs. 15}} = \frac{\xi + \delta c + \delta \ln(r+1)}{r+1}. \end{aligned}$$

Finalmente, vem o cálculo dos estimadores,

$$r = 0 : \quad M_{1, 0, 0} = \xi + \delta c = \tilde{b}_0,$$

$$r = 1 : \quad M_{1, 1, 0} = \frac{\xi + \delta c + \delta \ln(2)}{2} = \tilde{b}_1.$$

Resolvendo em ordem a ξ e δ vamos obter

$$\begin{cases} \xi = \tilde{b}_0 - \delta c \\ \frac{\xi + \delta c + \delta \ln(2)}{2} = \tilde{b}_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = \tilde{b}_0 - \delta c \\ \frac{\tilde{b}_0 + \delta \ln(2)}{2} = \tilde{b}_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = \tilde{b}_0 - \delta c \\ \delta = \frac{2\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0}{\ln(2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = \tilde{b}_0 - \frac{2\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0}{\ln(2)} c \\ \delta = \frac{2\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0}{\ln(2)}, \end{cases}$$

e os respectivos estimadores dos momentos probabilisticamente ponderados vêm dados por

$$\begin{cases} \hat{\xi} = \tilde{b}_0 - \frac{2\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0}{\ln(2)}c \\ \hat{\delta} = \frac{2\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0}{\ln(2)}. \end{cases}$$

Observação 15. Fazendo a substituição $t = u(r+1) \Rightarrow u = \frac{t}{r+1} \Rightarrow du = \frac{1}{r+1}dt$, vamos obter

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \ln(u)e^{-u(r+1)}du &= \int_0^\infty \ln\left(\frac{t}{r+1}\right)e^{-t} \frac{1}{r+1}dt = \frac{1}{r+1} \int_0^\infty (\ln(t) - \ln(r+1))e^{-t}dt \\ &= \frac{1}{r+1} \underbrace{\int_0^\infty \ln(t)e^{-t}dt}_{=-c} - \frac{\ln(r+1)}{r+1} \underbrace{\int_0^\infty e^{-t}dt}_{=1} = -\frac{c}{r+1} - \frac{\ln(r+1)}{r+1} = -\frac{c + \ln(r+1)}{r+1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^\infty \ln(u)e^{-u(r+1)}du = -\frac{c + \ln(r+1)}{r+1},$$

onde c é a constante de Euler-Mascheroni.

Método da Máxima Verosimilhança

Quando $\gamma \neq 0$, e considerando $\Theta = (\xi, \delta, \gamma)$, temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\Theta; \mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^n G_\gamma(x_i; \Theta) = \prod_{i=1}^n e^{-\left(1+\gamma\frac{x_i-\xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}} \frac{1}{\delta} \left(1+\gamma\frac{x_i-\xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} \\ &= \frac{1}{\delta^n} e^{-\sum_{i=1}^n \left(1+\gamma\frac{x_i-\xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}} \prod_{i=1}^n \left(1+\gamma\frac{x_i-\xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} \\ \Rightarrow \mathfrak{L}^*(\Theta; \mathbf{x}) &= \ln \left(\frac{1}{\delta^n} e^{-\sum_{i=1}^n \left(1+\gamma\frac{x_i-\xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}} \prod_{i=1}^n \left(1+\gamma\frac{x_i-\xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} \right) \\ &= -n \ln(\delta) - \sum_{i=1}^n \left(1+\gamma\frac{x_i-\xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} - \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \sum_{i=1}^n \ln \left(1+\gamma\frac{x_i-\xi}{\delta}\right). \end{aligned}$$

As equações de máxima verosimilhança obtêm-se, derivando a função de verosimilhança em ordem a cada um dos parâmetros e igualando a zero. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \mathfrak{L}^*(\Theta; \mathbf{x}) &= \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \left(1+\gamma\frac{x_i-\xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} \left(-\frac{\gamma}{\delta}\right) - \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \sum_{i=1}^n \frac{-\frac{\gamma}{\delta}}{1+\gamma\frac{x_i-\xi}{\delta}} \\ &= -\frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^n \left(1+\gamma\frac{x_i-\xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} + \left(\frac{1+\gamma}{\delta}\right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\gamma\frac{x_i-\xi}{\delta}} \\ &= \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^n \frac{1+\gamma - \left(1+\gamma\frac{x_i-\xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}}{1+\gamma\frac{x_i-\xi}{\delta}} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \delta} \mathfrak{L}^*(\Theta; \mathbf{x}) &= -\frac{n}{\delta} - \sum_{i=1}^n \left(1 + \gamma \frac{x_i - \xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} \left(\frac{x_i - \xi}{\delta^2}\right) - \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \sum_{i=1}^n \frac{-\gamma \frac{x_i - \xi}{\delta^2}}{1 + \gamma \frac{x_i - \xi}{\delta}} \\
&= -\frac{n}{\delta} - \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^n \left(1 + \gamma \frac{x_i - \xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} \left(\frac{x_i - \xi}{\delta}\right) + \left(\frac{1 + \gamma}{\delta}\right) \sum_{i=1}^n \frac{\frac{x_i - \xi}{\delta}}{1 + \gamma \frac{x_i - \xi}{\delta}} \\
&= -\frac{n}{\delta} + \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^n \frac{1 + \gamma - \left(1 + \gamma \frac{x_i - \xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}}{1 + \gamma \frac{x_i - \xi}{\delta}} \left(\frac{x_i - \xi}{\delta}\right) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \gamma} \mathfrak{L}^*(\Theta; \mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \left(1 + \gamma \frac{x_i - \xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\frac{x_i - \xi}{\delta}}{1 + \gamma \frac{x_i - \xi}{\delta}} - \frac{1}{\gamma^2} \ln \left(1 + \gamma \frac{x_i - \xi}{\delta}\right)\right) \\
&+ \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \gamma \frac{x_i - \xi}{\delta}\right) - \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \sum_{i=1}^n \frac{\frac{x_i - \xi}{\delta}}{1 + \gamma \frac{x_i - \xi}{\delta}} \\
&= \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=1}^n \left(\ln \left(1 + \gamma \frac{x_i - \xi}{\delta}\right) \left(1 - \left(1 + \gamma \frac{x_i - \xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1 + \gamma - \left(1 + \gamma \frac{x_i - \xi}{\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}}{1 + \gamma \frac{x_i - \xi}{\delta}} \gamma \left(\frac{x_i - \xi}{\delta}\right)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Embora a solução para estas equações não seja trivial, podemos concluir que o terno óptimo de estimadores $(\hat{\xi}, \hat{\delta}, \hat{\gamma})$ terá que obedecer às seguintes restrições:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{1 + \hat{\gamma} - \left(1 + \hat{\gamma} \frac{x_i - \hat{\xi}}{\hat{\delta}}\right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}}}}{1 + \hat{\gamma} \frac{x_i - \hat{\xi}}{\hat{\delta}}} = 0 \\ \sum_{i=1}^n \frac{1 + \hat{\gamma} - \left(1 + \hat{\gamma} \frac{x_i - \hat{\xi}}{\hat{\delta}}\right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}}}}{1 + \hat{\gamma} \frac{x_i - \hat{\xi}}{\hat{\delta}}} \left(\frac{x_i - \hat{\xi}}{\hat{\delta}}\right) = n \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \hat{\gamma} \frac{x_i - \hat{\xi}}{\hat{\delta}}\right) \left(1 - \left(1 + \hat{\gamma} \frac{x_i - \hat{\xi}}{\hat{\delta}}\right)^{-\frac{1}{\hat{\gamma}}}\right) = \hat{\gamma}. \end{cases}$$

Caso $\gamma = 0$, e $\Theta = (\xi, \delta)$ tem-se

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(\Theta; \mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^n G_{\gamma}(x_i; \Theta) = \prod_{i=1}^n e^{-e^{-\frac{x_i - \xi}{\delta}}} e^{-\frac{x_i - \xi}{\delta}} \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta^n} e^{-\sum_{i=1}^n e^{-\frac{x_i - \xi}{\delta}}} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{x_i - \xi}{\delta}} \\
\Rightarrow \mathfrak{L}^*(\Theta; \mathbf{x}) &= \ln \left(\frac{1}{\delta^n} e^{-\sum_{i=1}^n e^{-\frac{x_i - \xi}{\delta}}} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{x_i - \xi}{\delta}} \right) \\
&= -n \ln(\delta) - \sum_{i=1}^n e^{-\frac{x_i - \xi}{\delta}} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \xi}{\delta}.
\end{aligned}$$

Derivando e igualando a zero vem

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \mathfrak{L}^*(\Theta; \mathbf{x}) = -\frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{x_i - \xi}{\delta}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\delta} = \frac{n}{\delta} - \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{x_i - \xi}{\delta}} = \frac{1}{\delta} \left(n - \sum_{i=1}^n e^{-\frac{x_i - \xi}{\delta}} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \mathfrak{L}^*(\Theta; \mathbf{x}) = -\frac{n}{\delta} - \sum_{i=1}^n e^{-\frac{x_i - \xi}{\delta}} \left(\frac{x_i - \xi}{\delta^2} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \xi}{\delta^2} = 0.$$

Agora o par $(\hat{\xi}, \hat{\delta})$ deverá respeitar as seguintes equações:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{x_i - \hat{\xi}}{\hat{\delta}}} = n \\ \hat{\delta} = \bar{x} - \hat{\xi} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{x_i - \hat{\xi}}{\hat{\delta}}} (x_i - \hat{\xi}). \end{cases}$$

Capítulo 5

Simulação de Pontos Críticos

Por vezes, não é possível obter analiticamente pontos críticos de testes, ou seja, um quantil de probabilidade p , designado aqui por χ_p , e torna-se necessário estimá-lo através de métodos de simulação. Esta estimativa, e o consequente intervalo de confiança para χ_p , podem ser encontrados através de qualquer das duas formas seguintes:

1. Método dos quantis ou método de uma única amostra (SSM – do Inglês, Single-Sample Method);
2. Técnica das réplicas ou método multi-amostra (MSM – do Inglês, Multi-Sample Method).

Neste Capítulo iremos então dar especial atenção às técnicas usadas para simulação dos pontos críticos, que mais tarde serão apresentados em tabelas. Para ambas as técnicas iremos dar uma breve explicação teórica de como se processa para calcular os pontos críticos a partir de N amostras de dimensão n e de seguida apresentaremos o respectivo algoritmo em pseudo-código para que não surja qualquer dúvida a nível computacional. Para mais detalhes veja-se Juritz *et al.* (1983) e Fraga Alves (1985).

5.1 Método dos Quantis

Designando por N_q o número de amostras i.i.d. iniciais, este método começa por calcular o valor observado da estatística de teste de ajustamento escolhida, para cada uma dessas amostras. Assim, iremos ficar com uma única amostra de dimensão N_q , contendo os valores da estatística de teste do respectivo teste de ajustamento que utilizámos para cada uma das amostras.

Agora vejamos como simular um quantil, com associação imediata do erro da simulação, com base numa única amostra, e a partir de uma estatística ordinal dessa amostra. Considerando a amostra $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_{N_q})$ e usando a notação $[x]$ para a parte inteira

de x , e $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ para o quantil de probabilidade $1 - \frac{\alpha}{2}$ de uma Normal(0,1), o estimador do quantil de ordem p associado será dado por $\widehat{\chi}_p = X_{[N_q p] + 1 : N_q}$.

Considerando r e s dados por,

$$r = N_q p - \sqrt{N_q p(1-p)} z_{1-\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{2}, \quad s = N_q p + \sqrt{N_q p(1-p)} z_{1-\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{2},$$

então $[X_{[r]:N_q}, X_{[s]:N_q}]$ fornece um intervalo de confiança aproximado, a $100 \times (1 - \alpha)\%$ para χ_p . Este último resultado é justificado pelo seguinte teorema:

Teorema 5. *Para uma variável aleatória X absolutamente contínua, e para $r < s$, tem-se:*

$$P[X_{r:N_q} \leq \chi_p \leq X_{s:N_q}] = \pi(r, s; N_q, p) = \sum_{i=r}^{s-1} \binom{N_q}{i} p^i (1-p)^{N_q-i}.$$

Demonstração. Em primeiro lugar, repare-se que o acontecimento

$$\begin{aligned} A &= \{X_{r:N_q} \leq \chi_p\} = \{X_{r:N_q} \leq \chi_p\} \cap [\{X_{s:N_q} \geq \chi_p\} \cup \{X_{s:N_q} < \chi_p\}] \\ &= [X_{r:N_q} \leq \chi_p, X_{s:N_q} \geq \chi_p] \cup [X_{r:N_q} \leq \chi_p, X_{s:N_q} < \chi_p] = A_1 \cup A_2. \end{aligned}$$

Como, $X_{s:N_q} < \chi_p \Rightarrow X_{r:N_q} \leq \chi_p$, visto que $r < s$, então:

$$P[A_2] = P[X_{r:N_q} \leq \chi_p, X_{s:N_q} < \chi_p] = P[X_{s:N_q} < \chi_p].$$

Em virtude de se ter $\{X_{s:N_q} \geq \chi_p\} \cap \{X_{s:N_q} < \chi_p\} = \emptyset$, então $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Consequentemente vem,

$$\begin{aligned} P[A] &= P[A_1 \cup A_2] = P[A_1] + P[A_2] - P[A_1 \cap A_2] = P[A_1] + P[A_2] \\ &= P[X_{r:N_q} \leq \chi_p \leq X_{s:N_q}] + P[X_{s:N_q} < \chi_p] \\ &\Rightarrow P[X_{r:N_q} \leq \chi_p \leq X_{s:N_q}] = P[X_{r:N_q} \leq \chi_p] - P[X_{s:N_q} < \chi_p]. \end{aligned}$$

Tem-se ainda que a função de distribuição da k -ésima estatística ordinal associada à amostra X , é dada por:

$$\begin{aligned} F_{X_{k:N_q}}(x) &= P[X_{k:N_q} \leq x] = P[\text{pelo menos } k \text{ das v.a.'s } X_i \text{ são } \leq x] \\ &= \sum_{i=k}^{N_q} \binom{N_q}{i} (F(x))^i (1-F(x))^{N_q-i}. \end{aligned}$$

Da definição de χ_p , sai que $P[X \leq \chi_p] = p$, logo

$$\begin{aligned} \pi(r, s; N_q, p) &= P[X_{r:N_q} \leq \chi_p \leq X_{s:N_q}] \\ &= P[X_{r:N_q} \leq \chi_p] - P[X_{s:N_q} < \chi_p] \\ &= F_{X_{r:N_q}}(\chi_p) - F_{X_{s:N_q}}(\chi_p) \\ &= \sum_{i=r}^{N_q} \binom{N_q}{i} p^i (1-p)^{N_q-i} - \sum_{i=s}^{N_q} \binom{N_q}{i} p^i (1-p)^{N_q-i} \\ &= \sum_{i=r}^{s-1} \binom{N_q}{i} p^i (1-p)^{N_q-i}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. \square

Ora, como pretendemos encontrar um intervalo de confiança ao nível $(1 - \alpha) \times 100\%$, temos que encontrar r e s tais que, $\pi(r, s; N_q, p) = 1 - \alpha$.

Visto que N_q é elevado, podemos recorrer à aproximação da distribuição Binomial pela Normal, para calcular o valor de $\pi(r, s; N_q, p)$. Então,

$$\pi(r, s; N_q, p) = \sum_{i=r}^{s-1} \binom{N_q}{i} p^i (1-p)^{N_q-i} \approx \Phi\left(\frac{s-1+\frac{1}{2}-N_q p}{\sqrt{N_q p(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{r-\frac{1}{2}-N_q p}{\sqrt{N_q p(1-p)}}\right),$$

onde $\Phi(\cdot)$ é a função de distribuição da Normal reduzida. Obtemos então:

$$\begin{cases} \Phi\left(\frac{s-1+\frac{1}{2}-N_q p}{\sqrt{N_q p(1-p)}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \\ \Phi\left(\frac{r-\frac{1}{2}-N_q p}{\sqrt{N_q p(1-p)}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-r+\frac{1}{2}+N_q p}{\sqrt{N_q p(1-p)}}\right) = \frac{\alpha}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = N_q p - \sqrt{N_q p(1-p)} z_{1-\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{2} \\ s = N_q p + \sqrt{N_q p(1-p)} z_{1-\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Note-se que no último sistema, as expressões de r e s têm ambas $(+\frac{1}{2})$ no final, porque o somatório do Teorema 5 vai desde r até $s-1$, e não até s . Logo necessitamos de efectuar uma correção de continuidade para resolver esta situação.

Em seguida apresenta-se o algoritmo para este método.

Algoritmo 2. *Implementação do Método dos Quantis*

1. Dê-se o número de amostras (N_q), com um valor elevado.
2. Dê-se a dimensão de cada uma das amostras (n), onde ($n > 1$).
3. Dê-se a probabilidade (p), do quantil, com ($0 < p < 1$).
4. Dê-se o nível de significância (α) para o intervalo de confiança, com ($0 < \alpha < 1$).
5. Inicialize-se o vector (ET) que irá guardar as estatísticas de teste, calculadas a partir de cada amostra.
6. Para cada valor de i desde 1 até N_q , faça-se:
 7. Recolha-se a i -ésima amostra de dimensão (n).
 8. Calcule-se (ET[i]), a estatística de teste associada à i -ésima amostra.
 9. Ordene-se o vector (ET).
10. Calcule-se, $\text{quantil} = \text{ET}[(N_q \times p) + 1]$.
11. Calcule-se, $r = \left[(N_q) \times p - \sqrt{(N_q) \times p \times (1-p)} \times z_{1-\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{2} \right]$.
12. Calcule-se, $s = \left[(N_q) \times p + \sqrt{(N_q) \times p \times (1-p)} \times z_{1-\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{2} \right]$.
13. Calcule-se o limite inferior do intervalo de confiança, $\text{ET}[r]$.
14. Calcule-se o limite superior do intervalo de confiança, $\text{ET}[s]$.

5.2 Técnica das Réplicas

Baseando-se no facto de $\widehat{\chi_p}$ ser assintoticamente normal com valor médio χ_p e variância dada por $\sigma^2 := Var[\widehat{\chi_p}] = \frac{p(1-p)}{N_q f^2(\chi_p)}$, Schafer (1974) propôs um método alternativo.

Na técnica anterior trabalhámos com uma única réplica, constituída por N_q amostras, as quais por sua vez irão originar uma única amostra de estatísticas de teste com dimensão N_q . Desta vez, vamos passar a trabalhar com c réplicas (c relativamente pequeno), onde em cada uma teremos um número N_r de amostras tal que $N_q = c \times N_r$.

Facilmente se percebe que em cada réplica iremos obter uma amostra de dimensão N_r que contém os valores da estatística de teste que foi utilizada para o cálculo dos quantis. Procedendo da mesma forma que no método anterior, e designando por $\mathbf{X}^{(i)} = (X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \dots, X_{N_r}^{(i)})$ e por $\chi_p^{(i)}$, $i = 1, \dots, c$, respectivamente, a amostra e o quantil de ordem p associados à i -ésima réplica, então o estimador para este quantil será dado por $\widehat{\chi_p^{(i)}} = X_{[N_r p] + 1:N_r}^{(i)}$, $1 \leq i \leq c$.

Ora como se tem c réplicas então iremos obter c quantis, um para cada réplica. Portanto, podemos concluir que o estimador mais simples para χ_p será a média dos c estimadores obtidos no passo anterior, i.e.,

$$\bar{\chi_p} := \frac{1}{c} \sum_{i=1}^c \widehat{\chi_p^{(i)}}.$$

A variância deste estimador será estimada pela variância da amostra

$$S^2 = \widehat{\sigma^2} := Var[\bar{\chi_p}] = \frac{1}{c-1} \sum_{i=1}^c \left(\widehat{\chi_p^{(i)}} - \bar{\chi_p} \right)^2.$$

A forma como se calcula o intervalo de confiança também se altera, visto que agora estamos a trabalhar com uma média. Consideremos a variável aleatória T_{c-1} , definida por

$$T_{c-1} := \frac{\bar{\chi_p} - \chi_p}{S} \sqrt{c}.$$

Então, T_{c-1} tem uma distribuição t-de-Student com $c - 1$ graus de liberdade. Logo um intervalo de confiança para χ_p , ao nível de significância α , será dado por

$$\left(\bar{\chi_p} - \frac{S}{\sqrt{c}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{\chi_p} + \frac{S}{\sqrt{c}} t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right),$$

onde $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ é o quantil de probabilidade $1 - \frac{\alpha}{2}$ de uma t-de-Student com $c - 1$ graus de liberdade.

Note-se ainda que para valores de c elevados (aproximadamente acima de 20), a distribuição t-de-Student pode ser aproximada pela Normal padrão, e por conseguinte o intervalo de confiança anterior virá dado da seguinte forma

$$\left(\bar{\chi_p} - \frac{S}{\sqrt{c}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{\chi_p} + \frac{S}{\sqrt{c}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right),$$

onde $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ é o quantil de probabilidade $1 - \frac{\alpha}{2}$ de uma Normal reduzida.

Em seguida apresentamos o algoritmo para simulação de quantis através deste método.

Algoritmo 3. *Implementação da Técnica das Réplicas*

1. *Dê-se o número de réplicas pretendido (c), relativamente pequeno, com ($c > 0$).*
2. *Dê-se o número de amostras (N_r), com um valor elevado.*
3. *Dê-se a dimensão de cada uma das amostras (n), onde ($n > 1$).*
4. *Dê-se a probabilidade (p), do quantil, com ($0 < p < 1$).*
5. *Dê-se o nível de significância (α) para o intervalo de confiança, com ($0 < \alpha < 1$).*
6. *Inicialize-se o vector (ET) que irá guardar as estatísticas de teste de cada amostra.*
7. *Para cada valor de i desde 1 até c , faça-se:*
8. *Para cada valor de j desde 1 até N_r , faça-se:*
9. *Recolha-se a j -ésima amostra de dimensão (n).*
10. *Calcule-se (ET[j]), a estatística de teste associada à j -ésima amostra.*
11. *Ordene-se o vector (ET).*
12. *Calcule-se, $\text{quantil_p}[i] = \text{ET}[(N_r \times p) + 1]$.*
13. *Calcule-se, $\text{quantil} = \frac{\sum_{i=1}^c \text{quantil_p}[i]}{c}$.*
14. *Calcule-se o limite inferior do intervalo de confiança,*

$$\text{quantil} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\text{Var}(\text{quantil_p})}{c}}.$$
15. *Calcule-se o limite superior do intervalo de confiança,*

$$\text{quantil} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\text{Var}(\text{quantil_p})}{c}}.$$

5.3 Comparação dos Dois Métodos

Valores Médios e “Viés” dos Quantis Estimados

Na prática, surge imediatamente uma questão:

- *O que será melhor? Gerar-se c amostras e tirar-se a média $\overline{X_p}$ como estimador final, ou então gerar-se apenas uma grande amostra e tomar $\widehat{X_p}$ como estimador?*

Vamos começar por fazer o desenvolvimento do valor médio da k -ésima estatística ordinal, de uma amostra de dimensão N_q , em termos da inversa da função de distribuição de probabilidade e suas derivadas, denotadas respectivamente por $F^{-1}(x)$, $(F^{-1}(x))'$, $(F^{-1}(x))''$, e assim por diante.

Não faremos aqui a prova, mas sabe-se que, em populações contínuas, a aplicação da transformação Uniformizante ($U := F(X)$) a uma estatística ordinal $X_{k:N_q}$, a transforma na k -ésima estatística ordinal de uma Uniforme(0,1), denotada aqui por $U_{k:N_q}$. Sabe-se também que esta última e.o. tem distribuição $Beta(k, N_q + 1 - k)$. Assim, fazendo

$$U_{k:N_q} = F(X_{k:N_q}), \quad 1 \leq k \leq N_q,$$

e aplicando F^{-1} na igualdade anterior vem

$$F^{-1}(U_{k:N_q}) = F^{-1}\left(F(X_{k:N_q})\right) = X_{k:N_q}, \quad 1 \leq k \leq N_q.$$

Desenvolvendo agora $F^{-1}(U_{k:N_q})$, isto é, $X_{k:N_q}$ em série de Taylor em torno do valor médio de uma $Beta(k, N_q + 1 - k)$, dado por

$$\mathbb{E}[U_{k:N_q}] = \frac{k}{N_q + 1} =: p_k, \quad 1 \leq k \leq N_q,$$

ter-se-á

$$\begin{aligned} X_{k:N_q} &= F^{-1}(U_{k:N_q}) \\ &= F^{-1}(p_k) + (U_{k:N_q} - p_k) \left(F^{-1}(p_k)\right)' + \frac{(U_{k:N_q} - p_k)^2}{2} \left(F^{-1}(p_k)\right)'' + \dots \end{aligned} \quad (5.1)$$

Consequentemente, aplicando $\mathbb{E}(\cdot)$ em (5.1) e fazendo $q_k = 1 - p_k$, $1 \leq k \leq N_q$,

$$\mathbb{E}[X_{k:N_q}] = F^{-1}(p_k) + \frac{p_k q_k}{2(N_q + 2)} \left(F^{-1}(p_k)\right)'' + \dots \quad (5.2)$$

Com o intuito de estudar o “viés”, vamos desenvolver $F^{-1}(p_k)$ e $\left(F^{-1}(p_k)\right)''$, em série de Taylor, em torno de p ,

$$F^{-1}(p_k) = F^{-1}(p) + (p_k - p) \left(F^{-1}(p)\right)' + \frac{(p_k - p)^2}{2} \left(F^{-1}(p)\right)'' + \dots$$

$$\left(F^{-1}(p_k)\right)'' = \left(F^{-1}(p)\right)'' + (p_k - p) \left(F^{-1}(p)\right)''' + \frac{(p_k - p)^2}{2} \left(F^{-1}(p)\right)^{(IV)} + \dots$$

Substituindo agora estas duas expressões em (5.2), vamos obter

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{k:N_q}] &= F^{-1}(p) + (p_k - p) \left(F^{-1}(p)\right)' + \frac{(p_k - p)^2}{2} \left(F^{-1}(p)\right)'' + \dots \\ &+ \frac{p_k q_k}{2(N_q + 2)} \left(\left(F^{-1}(p)\right)'' + (p_k - p) \left(F^{-1}(p)\right)''' + \frac{(p_k - p)^2}{2} \left(F^{-1}(p)\right)^{(IV)} + \dots \right) + \dots \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ora, como $p_k = \frac{k}{N_q + 1} = \frac{[N_q p] + 1}{N_q + 1}$ e pondo $N_q p = [N_q p] + \varepsilon_1$ tem-se

$$p_k - p = \frac{[N_q p] + 1}{N_q + 1} - p = \frac{[N_q p] + 1 - N_q p - p}{N_q + 1} = \frac{1 - p - \varepsilon_1}{N_q + 1},$$

$$p_k q_k = p_k(1 - p_k) = \frac{N_q p - \varepsilon_1 + 1}{N_q + 1} \left(1 - \frac{N_q p - \varepsilon_1 + 1}{N_q + 1}\right) = \underbrace{\dots}_{\text{ver Obs. 16}} = p(1 - p) + O\left(\frac{1}{N_q}\right).$$

Observação 16. *Seja, $a_n(p)$ uma sucessão tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(p)$, i.e., $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(p) - b_n(p) = 0$. Defina-se*

$$z := \lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n(p) - b_n(p)).$$

Então se $z = 0$, tem-se que $a_n(p) - b_n(p) = o(\frac{1}{n})$. Caso se tenha $z \neq 0$, vem $a_n(p) - b_n(p) = O(\frac{1}{n})$.

Fazendo $n = N_q$ e colocando $a_{N_q}(p) = \frac{N_q p - \varepsilon_1 + 1}{N_q + 1} \left(1 - \frac{N_q p - \varepsilon_1 + 1}{N_q + 1}\right)$ virá $b_{N_q}(x) = p(1-p)$ e $z = 2p\varepsilon_1 - \varepsilon_1 + 1 - 3p + 2p^2 \neq 0$. Logo $a_{N_q}(p) - b_{N_q}(p) = O(\frac{1}{N_q})$.

Agora recorrendo à Observação 17, a expressão (5.3) poder-se-á escrever na seguinte forma

$$\mathbb{E}[X_{k:N_q}] = F^{-1}(p) + \frac{1-p-\varepsilon_1}{N_q+1} \left(F^{-1}(p)\right)' + \frac{p(1-p)}{2(N_q+2)} \left(F^{-1}(p)\right)'' + o\left(\frac{1}{N_q}\right). \quad (5.4)$$

Observação 17. *Note-se que, de acordo com a Observação 16 se colocarmos $n = N_q$, $a_{N_q}(p) = \frac{(1-p-\varepsilon_1)^2}{(N_q+1)^2}$ vamos obter $b_{N_q}(p) = 0$ e $z = 0$. Logo, $a_{N_q}(p) - b_{N_q}(p) = o(\frac{1}{N_q})$.*

Para T_n ser um estimador centrado de χ_p , tem de se ter $\mathbb{E}[T_n] = \chi_p$, e consequentemente o “viés” de $X_{k:N_q}$ será dado pelo segundo e seguintes termos de (5.4).

Estudemos agora o “viés” no caso da Secção 5.2. Quando se tem c amostras de dimensão, N_r (escolhido de forma a que $c \times N_r = N_q$), o estimador a ser usado, é como já foi mencionado, a média

$$\overline{\chi_p} = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^c \widehat{\chi_p^{(i)}},$$

em que se denota por $\widehat{\chi_p^{(i)}}$ o estimador do quantil de ordem p da i -ésima amostra de dimensão N_r , com $i = 1, 2, \dots, c$. Então,

$$\mathbb{E}[\overline{\chi_p}] = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^c \mathbb{E}\left[\widehat{\chi_p^{(i)}}\right] = \mathbb{E}[X_{l:N_r}],$$

pois para qualquer i tem-se $\widehat{\chi_p^{(i)}} = X_{l:N_r}$, com $l = [N_r p] + 1$. Usando (5.3), obtemos

$$\mathbb{E}[\overline{\chi_p}] = F^{-1}(p) + \frac{1-p-\varepsilon_2}{N_r+1} \left(F^{-1}(p)\right)' + \frac{p(1-p)}{2(N_r+2)} \left(F^{-1}(p)\right)'' + o\left(\frac{1}{N_r}\right), \quad (5.5)$$

onde $\varepsilon_2 = N_r p - [N_r p]$.

Consequentemente, o respectivo “viés” de $\overline{\chi_p}$ será dado pelo segundo e seguintes termos de (5.5).

Ora, na maioria das aplicações práticas onde se usam métodos para simular quantis, utilizam-se valores de N_r , N_q e p de modo a que ε_1 e ε_2 sejam nulos e, conseqüentemente, constata-se através de comparação de (5.4) e (5.5), que o “viés” para uma só grande amostra é menor do que no caso das réplicas, reduzido pelo factor aproximadamente c , do número de réplicas.

Valor Médio das Amplitudes dos Intervalos de Confiança para os Quantis Estimados

Embora os intervalos de confiança para as estimativas dos quantis, χ_p , raramente sejam dados, eles revelam-se úteis quando se usam tais pontos para comparar com outros métodos de obter esses pontos. Por essa razão será interessante fazer-se uma compração dos valores médios das amplitudes dos intervalos de confiança de χ_p , obtidos através das duas metodologias 5.1 e 5.2.

Para o caso da Secção 5.1, o intervalo de confiança é $I_q = (X_{r:N_q}, X_{s:N_q})$. O valor médio desta amplitude, denotado por L_q , e tendo em conta r , s , (5.2) e (5.3), pode-se escrever na seguinte forma

$$\begin{aligned}
 L_q &= \mathbb{E}[X_{s:N_q} - X_{r:N_q}] = \underbrace{\dots}_{\text{ver Obs. 18}} = F^{-1}(p_s) - F^{-1}(p_r) + O\left(\frac{1}{N_q}\right) \\
 &= F^{-1}(p) + (p_s - p)(F^{-1}(p))' + \dots - F^{-1}(p) - (p_r - p)(F^{-1}(p))' - \dots \\
 &= (F^{-1}(p))'[(p_s - p) - (p_r - p)] + \dots = \underbrace{\dots}_{\text{ver Obs. 17}} = (F^{-1}(p))' \left[\frac{s}{N_q + 1} - \frac{r}{N_q + 1} \right] + o\left(\frac{1}{N_q}\right) \\
 &= (F^{-1}(p))' \frac{N_q p + \sqrt{N_q p(1-p)} z_{1-\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{2} - N_q p + \sqrt{N_q p(1-p)} z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{2}}{N_q + 1} + o\left(\frac{1}{N_q}\right) \\
 &= (F^{-1}(p))' \frac{2\sqrt{N_q} \sqrt{p(1-p)} z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{N_q + 1} + o\left(\frac{1}{N_q}\right) \\
 &= \underbrace{\dots}_{\text{ver Obs. 19}} = (F^{-1}(p))' \frac{2\sqrt{p(1-p)} z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{N_q}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{N_q}}\right).
 \end{aligned}$$

Observação 18. Note-se que, de acordo com a expressão (5.2) se tem,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X_{k:N_q}] &= F^{-1}(p_k) + \frac{p_k q_k}{2(N_q + 2)} (F^{-1}(p_k))'' + \dots \\
 &= F^{-1}(p_k) + \underbrace{\frac{(N_q p - \varepsilon_1 + 1)(N_q - N_q p - \varepsilon_1)}{2(N_q + 1)^2(N_q + 2)} (F^{-1}(p_k))''}_{=O\left(\frac{1}{N_q}\right)} + \dots \\
 &= O\left(\frac{1}{N_q}\right), \text{ pois } \lim_{N_q \rightarrow \infty} N_q \frac{(N_q p - \varepsilon_1 + 1)(N_q - N_q p - \varepsilon_1)}{2(N_q + 1)^2(N_q + 2)} = \frac{p(1-p)}{2} (F^{-1}(p_k))'' \neq 0 \\
 &= F^{-1}(p_k) + O\left(\frac{1}{N_q}\right).
 \end{aligned}$$

Observação 19. *Note-se que,*

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{N_q}}{N_q + 1} &= \frac{\sqrt{N_q}}{N_q} \frac{N_q}{N_q + 1} = \frac{1}{\sqrt{N_q}} \frac{N_q + 1 - 1}{N_q + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N_q}} \left(1 - \frac{1}{N_q + 1}\right) = \frac{1}{\sqrt{N_q}} - \frac{1}{N_q^{\frac{3}{2}} + \sqrt{N_q}}. \end{aligned}$$

Como $\lim_{N_q \rightarrow \infty} \sqrt{N_q} \frac{1}{N_q^{\frac{3}{2}} + \sqrt{N_q}} = 0$, então $\frac{1}{N_q^{\frac{3}{2}} + \sqrt{N_q}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{N_q}}\right)$.

Portanto a menos de termos de $o\left(\frac{1}{\sqrt{N_q}}\right)$ tem-se

$$L_q = 2(F^{-1}(p))' \frac{\sqrt{p(1-p)} z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{N_q}}. \quad (5.6)$$

Na Secção 5.2, foi encontrado o intervalo $I_r = (\bar{X}_p - \frac{S}{\sqrt{c}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}_p + \frac{S}{\sqrt{c}} t_{1-\frac{\alpha}{2}})$. Designando por L_r , a amplitude do intervalo I_r , notemos em primeiro lugar que, tendo em atenção a expressão (5.1), substituindo k por l e N_q por N_r , vem

$$\begin{aligned} Var[X_{l:N_r}] &= Var[F^{-1}(U_{l:N_r})] \\ &= Var \left[F^{-1}(p_l) + (U_{l:N_r} - p_l) (F^{-1}(p_l))' + \frac{(U_{l:N_r} - p_l)^2}{2} (F^{-1}(p_l))'' + \dots \right] \\ &= \left[(F^{-1}(p_l))' \right]^2 Var[U_{l:N_r}] + \frac{\left[(F^{-1}(p_l))'' \right]^2}{4} Var[(U_{l:N_r} - p_l)^2] + \dots \\ &= \frac{p_l q_l}{N_r + 2} [(F^{-1}(p_l))']^2 + o\left(\frac{1}{N_r + 2}\right). \end{aligned}$$

Portanto a menos de termos de $o\left(\frac{1}{N_r + 2}\right)$ tem-se

$$Var[X_{l:N_r}] = \frac{p_l q_l}{N_r + 2} [(F^{-1}(p_l))']^2,$$

onde $p_l := \frac{l}{N_r + 1}$, é o valor médio de uma $Beta(l, N_r + 1 - l)$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\frac{S^2}{c}\right] &= \frac{1}{c} \mathbb{E}\left[\frac{1}{c-1} \sum_{i=1}^c \left(\widehat{X_p^{(i)}} - \bar{X}_p\right)^2\right] = \frac{Var[X_{l:N_r}]}{c} \\ &= \frac{p_l q_l}{c(N_r + 2)} [(F^{-1}(p))']^2 + \dots = \underbrace{\frac{p(1-p)}{cN_r}}_{=N_q} [(F^{-1}(p))']^2 + o\left(\frac{1}{N_q}\right). \end{aligned}$$

A menos de termos de $o\left(\frac{1}{N_q}\right)$

$$\mathbb{E}\left[\frac{S^2}{c}\right] = \frac{p(1-p)}{N_q} [(F^{-1}(p))']^2,$$

pelo que L_r , a menos de termos de $o\left(\frac{1}{\sqrt{N_q}}\right)$, é dado por

$$L_r = \mathbb{E}\left[\frac{2S}{\sqrt{c}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 2t_{1-\frac{\alpha}{2}}[p(1-p)]^{\frac{1}{2}} \frac{(F^{-1}(p))'}{\sqrt{N_q}}. \quad (5.7)$$

Comparando as expressões (5.6) e (5.7) obtidas para L_q e L_r , respectivamente, constatamos que são semelhantes, tendo no lugar de $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ o valor $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Como o número de réplicas, c , é usualmente pequeno, tem-se $z_{1-\frac{\alpha}{2}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}$, pelo que $L_q < L_r$.

Observações finais:

- Em termos de optimização podemos concluir que o Algoritmo 3 é bastante mais rápido do que o Algoritmo 2. Isto deve-se ao facto de o algoritmo da ordenação ser bastante lento. Repare-se que no Algoritmo 2 estamos a ordenar uma amostra de dimensão N_q que é bastante maior do que as amostras que se ordenam no Algoritmo 3 que têm dimensão N_r . Portanto é muito mais rápido ordenar-se c amostras de dimensão N_r do que se ordenar uma amostra de dimensão N_q .
- A precisão de I_r pode ser fraca, já que depende da normalidade dos quantis $X_p^{(1)}, X_p^{(2)}, \dots, X_p^{(c)}$ o que não corresponde à verdade se se tratarem de estatísticas ordinais extremas, que é o nosso caso.

Apêndice A

Scripts

A.1 Pontos Críticos (Assintóticos) de D_n e U_n^2

```
1. #Input:
2. #p - Probabilidade desejada;
3. #metodo - ks -> Kolmogorov-Smirnov;
4. #      s  -> Stephens;
5.
6. encontra_quantil <- function(p, metodo) {
7.   if(p > 1 || p < 0)
8.     stop("O valor de p deve estar entre 0 e 1.")
9.   if(metodo != "ks" && metodo != "s")
10.    stop("Introduza um dos dois métodos disponíveis: 'ks' ou 's'.")
11.   n <- 10
12.   q <- c()
13.   if(metodo == "ks")
14.     q <- seq(0.36000, 2.00000, 0.00001)
15.   if(metodo == "s")
16.     q <- seq(0.01000, 0.40000, 0.00001)
17.   erro <- 1
18.   for(j in q) {
19.     aux <- 0
20.     if(metodo == "ks")
21.       for(i in 1:n)
22.         aux <- aux+((-1)^(i-1)*exp(-2*(i^2)*(j^2)))
23.     if(metodo == "s")
24.       for(i in 1:n)
25.         aux <- aux+((-1)^(i-1)*exp(-2*(i^2)*(pi^2)*j))
26.     final <- 1-2*aux
27.     erro_aux <- abs(final-p)
28.     if(erro_aux < erro) {
29.       erro <- erro_aux
30.       quantil <- j
31.     }
32.   }
33.   return(quantil)
34. }
```

A.2 Representações Gráficas da f.d.p. para a GEV de Máximos e de Mínimos e para a GP

```

1. #Input:
2. #gama - Parâmetro de forma da respectiva distribuição.
3.
4. library(evir)
5.
6. #Generalizada de valores extremos
7.
8. densidade_gev <- function(gama) {
9.   if(gama < 0)
10.    stop("Deve inserir um gama positivo")
11.   plot(gama, main="Generalizada de Valores Extremos de Máximos", xlab="x",
12.        ylab="Função densidade de probabilidade", xlim=c(-3, 4), ylim=c(0, 0.6),
13.        type="n", axes=F)
14.   axis(1, seq(-3, 4, 1))
15.   axis(2, seq(0, 0.6, 0.1))
16.   lines(seq(-5, (1/gama)-0.01, 0.01), dgev(seq(-5, (1/gama)-0.01, 0.01), -gama, 0, 1),
17.         lwd=2, lty=2)
18.   lines(seq(-(1/gama)+0.1, 5, 0.1), dgev(seq((1/gama)+0.1, 5, 0.1),
19.        gama, 0, 1), lwd = 3, lty = 1)
20.   lines(seq(-5, 5, 0.1), exp(-seq(-5, 5, 0.1))*exp(-exp(-seq(5, 5, 0.1))),
21.         lwd = 1, lty = 3)
22.   lines(seq(-5, 5, 0.1), dnorm(seq(-5, 5, 0.1), 0, 1))
23.   legend(-3, 0.6, c(expression(gama == 0.4), expression(gama == 0),
24.                     expression(gama == -0.4), "Normal(0, 1)"),
25.         lty = c(1, 3, 2, 1), lwd = c(3, 1, 2, 1))
26.   abline(0, 0)
27.   abline(0, 9999999999)
28. }
29.
30. #Generalizada de valores extremos mínimos
31.
32. densidade_gev_min <- function(gama) {
33.   if(gama < 0)
34.    stop("Deve inserir um gama positivo")
35.   plot(gama, main="Generalizada de Valores Extremos de Mínimos", xlab="x",
36.        ylab="Função densidade de probabilidade", xlim=c(-4, 3), ylim=c(0, 0.6),
37.        type="n", axes=F)
38.   axis(1, seq(-4, 3, 1))
39.   axis(2, seq(0, 0.6, 0.1))
40.   lines(seq(-(1/gama)+0.01, 5, 0.01),
41.         (1+gama*seq(-(1/gama)+0.01, 5, 0.01))^(1/gama)-1)*
42.         exp(-(1+gama*seq(-(1/gama)+0.01, 5, 0.01))^(1/gama)), lwd=2, lty=2)
43.   lines(seq(-5, (1/gama)-0.1, 0.1), (1-gama*
44.         seq(-5, (1/gama)-0.1, 0.1))^(1/gama)-1)*
45.         exp(-(1-gama*seq(-5, (1/gama)-0.1, 0.1))^(1/gama)), lwd=3, lty=1)
46.   lines(seq(-5, 5, 0.1), exp(seq(-5, 5, 0.1))*exp(-exp(seq(-5, 5, 0.1))),
47.         lwd=1, lty=3)
48.   lines(seq(-5, 5, 0.1), dnorm(seq(-5, 5, 0.1), 0, 1))
49.   legend(-4, 0.6, c(expression(gama == 0.4), expression(gama == 0),
50.                     expression(gama == -0.4), "Normal(0,1)"),
51.         lty=c(1, 3, 2, 1), lwd=c(3, 1, 2, 1))

```



```

52.     abline(0,0)
53.     abline(0, 9999999999)
54.   }
55.
56. #Pareto generalizada
57.
58. densidade_gpd <- function(gama) {
59.   if(gama < 0)
60.     stop("Deve inserir um gama positivo")
61.   plot(gama, main="Pareto Generalizada", xlab="x",
62.        ylab="Função densidade de probabilidade", xlim=c(0, 6), ylim=c(0, 1),
63.        type="n", axes=F)
64.   axis(1, seq(0,6,1))
65.   axis(2, seq(0,1,0.1))
66.   lines(seq(0, (1/gama)-0.01, 0.01), dgpdp(seq(0, (1/gama)-0.01, 0.01), -gama, 0, 1),
67.         lwd=3, lty=1)
68.   lines(seq(0,10,0.1), dgpdp(seq(0,10,0.1), gama, 0, 1), lwd=2, lty=2)
69.   lines(seq(0,10,0.1), exp(-seq(0,10,0.1)), lty=1)
70.   legend(2, 1, c(expression(gamma == 0.4), expression(gamma == 0),
71.                  expression(gamma == -0.4)), lty=c(2,1,1), lwd=c(2,1,3))
72.   abline(0,0)
73.   abline(0, 9999999999)
74. }

```

A.3 Simulação de Quantis da GP com 2 Parâmetros: Forma (γ) e Escala (δ)

```

1. #para usar a função "pgpd"
2. library(evir)
3.
4. #para omitir a mensagens de aviso (warnings)
5. options(warn = -1)
6.
7. #função que simula o quantil de uma Pareto Generalizada
8. simula_quantil_gpd <- function() {
9.   cat("\nBem-vindo ao script para simulação de um quantil de uma Pareto Generalizada.\n
10.     Para que resulte é importante que siga todos os passos indicados.
11.     Ao executar o programa este irá pedir-lhe para preencher 8 campos. Para todas as
12.     questões que tenham mais do que uma opção de resposta, serão indicadas todas as
13.     opções de resposta possíveis.
14.     Deve responder a todas as questões na consola.
15.     Para interromper a aplicação basta pressionar em qualquer momento a tecla 'ESC'. \n")
16.   o <- 1
17.   while(o != 2) {
18.     remove(list = ls())
19.     cat("1º - Introduza o valor para o parâmetro de forma da Pareto Generalizada
20.       (Real):\n")
21.     gama <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
22.     while(length(gama) == 0) {
23.       cat("\nIntroduza o valor para o parâmetro de forma da Pareto Generalizada
24.         (Real):\n")
25.       gama <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
26.     }
27.     cat("\n2º - Introduza a dimensão que pretende para as amostras (Inteiro > 1):\n")

```

```

28.     n <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
29.     while(n <= 1 || length(n) == 0) {
30.         cat("\nAs dimensões das amostras devem ser maiores que um.
31.             Introduza a dimensão que pretende para as amostras (Inteiro > 1):\n")
32.         n <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
33.     }
34.     cat("\n3º - Introduza o número de amostras que pretende (Inteiro positivo):\n")
35.     N <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
36.     while(N <= 0 || length(N) == 0) {
37.         cat("\nO número de amostras deve ser positivo.
38.             Introduza o número de amostras que pretende (Inteiro positivo):\n")
39.         N <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
40.     }
41.     cat("\n4º - Introduza a probabilidade pretendida para o quantil (Real entre 0 e 1):\n")
42.     p <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
43.     while(p <= 0 || p >= 1 || length(p) == 0) {
44.         cat("\nAs probabilidades dos quantis devem estar entre 0 e 1.
45.             Introduza a probabilidade pretendida para o quantil (Real entre 0 e 1):\n")
46.         p <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
47.     }
48.     cat("\n5º - Introduza o nível de significância para o Intervalo de Confiança
49.         (Real entre 0 e 1):\n")
50.     alfa <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
51.     while(alfa <= 0 || alfa >= 1 || length(alfa) == 0) {
52.         cat("\nO nível de significância deve estar entre 0 e 1.
53.             Introduza o nível de significância para o Intervalo de Confiança
54.             (Real entre 0 e 1):\n")
55.         alfa <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
56.     }
57.     cat("\n6º - Introduza a técnica que pretende usar:
58.         \t1 -> Método dos quantis
59.         \t2 -> Técnica das réplicas\n")
60.     v <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
61.     while((v != 1 && v != 2) || length(v) == 0) {
62.         cat("\nIntroduza uma técnica disponível.
63.             \t1 -> Método dos quantis
64.             \t2 -> Técnica das réplicas\n")
65.         v <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
66.     }
67.     if(v == 1)
68.         tecnica <- c("quantis")
69.     if(v == 2) {
70.         cat("\n\tSelecionou a técnica das réplicas.
71.             \tIntroduza o número de réplicas que pretende (Inteiro positivo):\n")
72.         k <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
73.         while(k <= 0 || length(k) == 0) {
74.             cat("\n\tO número de réplicas deve ser positivo.
75.                 \tIntroduza o número de réplicas que pretende (Inteiro positivo):\n")
76.             k <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
77.         }
78.         tecnica <- c("replicas")
79.     }
80.     cat("\n7º - Introduza a estatística de teste que pretende usar:
81.         \t1 -> Kolmogorov-Smirnov
82.         \t2 -> Cramér-von Mises
83.         \t3 -> Stephens\n")
84.     v <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")

```

```

85.     while( (v != 1 && v != 2 && v != 3) || length(v) == 0) {
86.         cat("Introduza um estatística de teste disponível.
87.             \t1 -> Kolmogorov-Smirnov
88.             \t2 -> Cramér-von Mises
89.             \t3 -> Stephens\n")
90.         v <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
91.     }
92.     if(v == 1)
93.         estatistica_teste <- c("ks")
94.     if(v == 2)
95.         estatistica_teste <- c("cvm")
96.     if(v == 3)
97.         estatistica_teste <- c("s")
98.     cat("\n8º - Introduza o método para obter estimadores desejado:
99.         \t1 -> Momentos
100.        \t2 -> Momentos probabilisticamente ponderados
101.        \t3 -> Máxima verosimilhança\n")
102.     v <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
103.     while( (v != 1 && v != 2 && v != 3) || length(v) == 0) {
104.         cat("Introduza um método para obter estimadores disponível.
105.             \t1 -> Momentos
106.             \t2 -> Momentos probabilisticamente ponderados
107.             \t3 -> Máxima verosimilhança\n")
108.         v <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
109.     }
110.     if(v == 1)
111.         metodo_est <- c("m")
112.     if(v == 2)
113.         metodo_est <- c("pwm")
114.     if(v == 3)
115.         metodo_est <- c("mv")
116.
117.     #método dos momentos
118.     m <- function(data, dim) {
119.         xbar <- mean(data)
120.         s2 <- ((dim-1)/(dim))*var(data)
121.         est_gama <- -0.5 * (((xbar * xbar)/s2) - 1)
122.         est_delta <- 0.5 * xbar * (((xbar * xbar)/s2) + 1)
123.         return(c(est_gama, est_delta))
124.     }
125.
126.     #método da máxima verosimilhança
127.     mv <- function(data) {
128.         xbar <- mean(data)
129.         s2 <- var(data)
130.         xi0 <- -0.5 * (((xbar * xbar)/s2) - 1)
131.         beta0 <- 0.5 * xbar * (((xbar * xbar)/s2) + 1)
132.         theta <- c(xi0, beta0)
133.         negloglik <- function(theta, tmp) {
134.             xi <- theta[1]
135.             beta <- theta[2]
136.             cond1 <- beta <= 0
137.             cond2 <- (xi <= 0) && (max(tmp) > (-beta/xi))
138.             if(cond1 || cond2)
139.                 f <- 1e+06
140.             else {
141.                 y <- log(1 + (xi * tmp)/beta)

```

```

142.         y <- y/xi
143.         f <- length(tmp) * log(beta) + (1 + xi) * sum(y)
144.     }
145.     f
146. }
147. fit <- optim(theta, negloglik, hessian = FALSE, tmp = data)
148. par.ests <- fit$par
149. return(par.ests)
150. }
151.
152. #método dos momentos probabilisticamente ponderados
153. pwm <- function(data,dim) {
154.     a0 <- mean(data)
155.     gamma <- -0.35
156.     delta <- 0
157.     ppositions <- c()
158.     ppositions <- ((1:dim) + gamma)/(dim + delta)
159.     a1 <- mean(data * (1 - ppositions))
160.     est_gama <- 2 - a0/(a0 - 2 * a1)
161.     est_delta <- (2 * a0 * a1)/(a0 - 2 * a1)
162.     return(c(est_gama, est_delta))
163. }
164.
165. #estatística de teste Kolmogorov-Smirnov
166. teste_kolmogorov_smirnov <- function(data) {
167.     x_max <- c()
168.     d <- sort(data)
169.     n <- length(d)
170.     if(metodo_est == "m" && gama != 0)
171.         estimadores <- m(d,n)
172.     if(metodo_est == "mv" && gama != 0)
173.         estimadores <- mv(d)
174.     if(metodo_est == "pwm" && gama != 0)
175.         estimadores <- pwm(d,n)
176.     if(gama != 0) {
177.         est_delta <- estimadores[2]
178.         est_gama <- estimadores[1]
179.         for(i in 1:n)
180.             if(pgpd(d[i], est_gama, 0, est_delta) == "NaN")
181.                 return(0)
182.         fde <- (1:n)/n
183.         x_max[1] <- max( abs( pgpd(d[1], est_gama, 0, est_delta) - fde[1] ),
184.                        abs( pgpd(d[1], est_gama, 0, est_delta) ) )
185.         for(j in 2:n)
186.             x_max[j] <- max( abs( pgpd(d[j], est_gama, 0, est_delta) - fde[j] ),
187.                             abs( pgpd(d[j], est_gama, 0, est_delta) - fde[j-1] ) )
188.         }
189.     if(gama == 0) {
190.         est_delta <- 1/mean(d)
191.         fde <- (1:n)/n
192.         x_max[1] <- max( abs(pexp(d[1], est_delta)-fde[1]), abs(pexp(d[1], est_delta)) )
193.         for(j in 2:n)
194.             x_max[j] <- max( abs( pexp(d[j], est_delta) - fde[j] ),
195.                             abs( pexp(d[j], est_delta) - fde[j-1] ) )
196.         }
197.     est_teste <- max(x_max)
198.     return(est_teste)

```

```

199.     }
200.
201.     #estatística de teste Cramér-vonMises
202.     teste_cramer_von_mises <- function(data) {
203.         d <- sort(data)
204.         n <- length(d)
205.         if(metodo_est == "m" && gama != 0)
206.             estimadores <- m(d,n)
207.         if(metodo_est == "mv" && gama != 0)
208.             estimadores <- mv(d)
209.         if(metodo_est == "pwm" && gama != 0)
210.             estimadores <- pwm(d,n)
211.         if(gama != 0) {
212.             est_delta <- estimadores[2]
213.             est_gama <- estimadores[1]
214.             for(i in 1:n)
215.                 if(pgpd(d[i],est_gama,0,est_delta) == "NaN")
216.                     return (0)
217.             aux <- 0
218.             for(j in 1:n)
219.                 aux <- aux + ( ((2*j-1)/(2*n)) - pgpd(d[j],est_gama,0,est_delta) )^2
220.             est_teste <- (1/(12*n)) + aux
221.         }
222.         if(gama == 0) {
223.             est_delta <- 1/mean(d)
224.             aux <- 0
225.             for(j in 1:n)
226.                 aux <- aux + ( ((2*j-1)/(2*n)) - pexp(d[j],est_delta) )^2
227.             est_teste <- (1/(12*n)) + aux
228.         }
229.         return(est_teste)
230.     }
231.
232.     #estatística de teste Stephens
233.     teste_stephens <- function(data) {
234.         d <- sort(data)
235.         n <- length(d)
236.         if(metodo_est == "m" && gama != 0)
237.             estimadores <- m(d,n)
238.         if(metodo_est == "mv" && gama != 0)
239.             estimadores <- mv(d)
240.         if(metodo_est == "pwm" && gama != 0)
241.             estimadores <- pwm(d,n)
242.         if(gama != 0) {
243.             est_delta <- estimadores[2]
244.             est_gama <- estimadores[1]
245.             for(i in 1:n)
246.                 if(pgpd(d[i],est_gama,0,est_delta) == "NaN")
247.                     return (0)
248.             soma <- pgpd(d[1],est_gama,0,est_delta)
249.             for(l in 2:n)
250.                 soma <- soma + pgpd(d[l],est_gama,0,est_delta)
251.             f_barra <- soma/n
252.             aux <- (pgpd(d[1],est_gama,0,est_delta) - ((2*1-1)/(2*n)) - f_barra + 0.5 )^2
253.             for(j in 2:n)
254.                 aux <- aux + (pgpd(d[j],est_gama,0,est_delta) - ((2*j-1)/(2*n)) - f_barra + 0.5 )^2
255.             est_teste <- (1/(12*n)) + aux

```

```

256.     }
257.     if(gama == 0) {
258.         est_delta <- 1/mean(d)
259.         soma <- pexp(d[1], est_delta)
260.         for(i in 2:n)
261.             soma <- soma + pexp(d[i], est_delta)
262.         f_barra <- soma/n
263.         aux <- (pexp(d[1], est_delta) - ((2*1-1)/(2*n)) - f_barra + 0.5 )^2
264.         for(j in 2:n)
265.             aux <- aux + ( pexp(d[j], est_delta) - ((2*j-1)/(2*n)) - f_barra + 0.5 )^2
266.         est_teste <- (1/(12*n)) + aux
267.     }
268.     return(est_teste)
269. }
270.
271. #método dos quantis
272. if(tecnic == "quantis") {
273.     conta_a <- 0
274.     metodo <- c()
275.     if(estatistica_teste == "ks" && gama != 0)
276.         for(i in 1:N) {
277.             amostra <- c()
278.             amostra <- ((runif(n, 0, 1))^(-gama)-1)/gama
279.             metodo[i] <- teste_kolmogorov_smirnov(amostra)
280.             while(metodo[i]==0) {
281.                 amostra <- c()
282.                 amostra <- ((runif(n, 0, 1))^(-gama)-1)/gama
283.                 metodo[i] <- teste_kolmogorov_smirnov(amostra)
284.                 conta_a <- conta_a + 1
285.             }
286.         }
287.     if(estatistica_teste == "cvm" && gama != 0)
288.         for(i in 1:N) {
289.             amostra <- c()
290.             amostra <- ((runif(n, 0, 1))^(-gama)-1)/gama
291.             metodo[i] <- teste_cramer_von_mises(amostra)
292.             while(metodo[i]==0) {
293.                 amostra <- c()
294.                 amostra <- ((runif(n, 0, 1))^(-gama)-1)/gama
295.                 metodo[i] <- teste_cramer_von_mises(amostra)
296.                 conta_a <- conta_a + 1
297.             }
298.         }
299.     if(estatistica_teste == "s" && gama != 0)
300.         for(i in 1:N) {
301.             amostra <- c()
302.             amostra <- ((runif(n, 0, 1))^(-gama)-1)/gama
303.             metodo[i] <- teste_stephens(amostra)
304.             while(metodo[i]==0) {
305.                 amostra <- c()
306.                 amostra <- ((runif(n, 0, 1))^(-gama)-1)/gama
307.                 metodo[i] <- teste_stephens(amostra)
308.                 conta_a <- conta_a + 1
309.             }
310.         }
311.     if(estatistica_teste == "ks" && gama == 0)
312.         for(i in 1:N) {

```

```

313.         amostra <- c()
314.         amostra <- -log(runif(n,0,1))
315.         metodo[i] <- teste_kolmogorov_smirnov(amostra)
316.     }
317.     if(estatistica_teste == "cvm" && gama == 0)
318.     for(i in 1:N) {
319.         amostra <- c()
320.         amostra <- -log(runif(n,0,1))
321.         metodo[i] <- teste_cramer_von_mises(amostra)
322.     }
323.     if(estatistica_teste == "s" && gama == 0)
324.     for(i in 1:N) {
325.         amostra <- c()
326.         amostra <- -log(runif(n,0,1))
327.         metodo[i] <- teste_stephens(amostra)
328.     }
329.     ord <- sort(metodo)
330.     quantil <- ord[trunc(N*p)+1]
331.     #Ic a alfa%
332.     r <- trunc(N*p-sqrt(N*p*(1-p)))*qnorm(1-(alfa/2),0,1)+(1/2))
333.     s <- trunc(N*p+sqrt(N*p*(1-p)))*qnorm(1-(alfa/2),0,1)+(1/2))
334.     precisao <- ord[s] - ord[r]
335.     cat("\nNº de amostras:", N, ";
336.         Dimensão de cada amostra:", n, ";
337.         Probabilidade do quantil:", p, ";
338.         Quantil:", quantil, ";
339.         Limite inferior do Intervalo de Confiança a", (1-alfa)*100, "%:", ord[r], ";
340.         Limite superior do Intervalo de Confiança a", (1-alfa)*100, "%:", ord[s], ";
341.         Amplitude do Intervalo de Confiança:", round(precisao,6), ";
342.         Percentagem de amostras não admissíveis em", N+conta_a, "amostras:",
343.         conta_a/(N+conta_a)*100, "%.")
344. }
345.
346. #técnica das réplicas
347. if(tecnic == "replicas") {
348.     conta_a <- 0
349.     quantil_ord_p <- c()
350.     if(estatistica_teste == "ks" && gama != 0)
351.     for(j in 1:k) {
352.         metodo <- c()
353.         for(i in 1:N) {
354.             amostra <- c()
355.             amostra <- ((runif(n,0,1))^(-gama)-1)/gama
356.             metodo[i] <- teste_kolmogorov_smirnov(amostra)
357.             while(metodo[i]==0) {
358.                 amostra <- c()
359.                 amostra <- ((runif(n,0,1))^(-gama)-1)/gama
360.                 metodo[i] <- teste_kolmogorov_smirnov(amostra)
361.                 conta_a <- conta_a + 1
362.             }
363.         }
364.         ord <- sort(metodo)
365.         quantil_ord_p[j] <- ord[trunc(N*p)+1]
366.     }
367.     if(estatistica_teste == "cvm" && gama != 0)
368.     for(j in 1:k) {
369.         metodo <- c()

```

```

370.         for(i in 1:N) {
371.             amostra <- c()
372.             amostra <- ((runif(n,0,1))^(1-gama)-1)/gama
373.             metodo[i] <- teste_cramer_von_mises(amostra)
374.             while(metodo[i]==0) {
375.                 amostra <- c()
376.                 amostra <- ((runif(n,0,1))^(1-gama)-1)/gama
377.                 metodo[i] <- teste_cramer_von_mises(amostra)
378.                 conta_a <- conta_a + 1
379.             }
380.         }
381.         ord <- sort(metodo)
382.         quantil_ord_p[j] <- ord[trunc(N*p)+1]
383.     }
384. if(estatistica_teste == "s" && gama != 0)
385.     for(j in 1:k) {
386.         metodo <- c()
387.         for(i in 1:N) {
388.             amostra <- c()
389.             amostra <- ((runif(n,0,1))^(1-gama)-1)/gama
390.             metodo[i] <- teste_stephens(amostra)
391.             while(metodo[i]==0) {
392.                 amostra <- c()
393.                 amostra <- ((runif(n,0,1))^(1-gama)-1)/gama
394.                 metodo[i] <- teste_stephens(amostra)
395.                 conta_a <- conta_a + 1
396.             }
397.         }
398.         ord <- sort(metodo)
399.         quantil_ord_p[j] <- ord[trunc(N*p)+1]
400.     }
401. if(estatistica_teste == "ks" && gama == 0)
402.     for(j in 1:k) {
403.         metodo <- c()
404.         for(i in 1:N) {
405.             amostra <- c()
406.             amostra <- -log(runif(n,0,1))
407.             metodo[i] <- teste_kolmogorov_smirnov(amostra)
408.         }
409.         ord <- sort(metodo)
410.         quantil_ord_p[j] <- ord[trunc(N*p)+1]
411.     }
412. if(estatistica_teste == "cvm" && gama == 0)
413.     for(j in 1:k) {
414.         metodo <- c()
415.         for(i in 1:N) {
416.             amostra <- c()
417.             amostra <- -log(runif(n,0,1))
418.             metodo[i] <- teste_cramer_von_mises(amostra)
419.         }
420.         ord <- sort(metodo)
421.         quantil_ord_p[j] <- ord[trunc(N*p)+1]
422.     }
423. if(estatistica_teste == "s" && gama == 0)
424.     for(j in 1:k) {
425.         metodo <- c()
426.         for(i in 1:N) {

```



```

427.             amostra <- c()
428.             amostra <- -log(runif(n, 0, 1))
429.             metodo[i] <- teste_stephens(amostra)
430.         }
431.         ord <- sort(metodo)
432.         quantil_ord_p[j] <- ord[trunc(N*p)+1]
433.     }
434.     quantil <- mean(quantil_ord_p)
435.     #Intervalo de confiança a (1-alfa)%
436.     ext_inf <- quantil - qt(1-(alfa/2), k-1)* sqrt(var(quantil_ord_p)/k)
437.     ext_sup <- quantil + qt(1-(alfa/2), k-1)* sqrt(var(quantil_ord_p)/k)
438.     precisao <- ext_sup - ext_inf
439.     cat("\nNº de réplicas:", k, ";
440.         Nº de amostras:", N, ";
441.         Dimensão de cada amostra:", n, ";
442.         Probabilidade do quantil:", p, ";
443.         Quantil:", quantil, ";
444.         Limite inferior do Intervalo de Confiança a", (1-alfa)*100, "%:", ext_inf, ";
445.         Limite superior do Intervalo de Confiança a", (1-alfa)*100, "%:", ext_sup, ";
446.         Amplitude do Intervalo de Confiança:", round(precisao, 6), ";
447.         Percentagem de amostras não admissíveis em", (k*N)+conta_a, "amostras:",
448.         conta_a/((k*N)+conta_a)*100, "%.")
449.     }
450.     cat("\n\nSelecione uma opção:
451.         \t1 -> Fazer uma nova simulação
452.         \t2 -> Sair da aplicação\n")
453.     o <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
454.     while( (o!=1 && o!=2) || length(o)==0) {
455.         cat("\n\nOpção não válida. Escolha uma operação possível:
456.             \t1 -> Fazer uma nova simulação
457.             \t2 -> Sair da aplicação\n")
458.         o <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
459.     }
460. }
461. cat("\n\nDigite na janela da consola 'q()', e em seguida pressione 'Yes' para sair.
462.     Obrigado pela sua colaboração.
463.     Paulo Santos\n\n")
464. }

```

A.4 Simulação de Quantis da GEV de Máximos com 3 Parâmetros: Forma (γ), Escala (δ) e Localização (ξ)

```

1. #para usar a função "pgev"
2. library(evir)
3.
4. #para omitir a mensagens de aviso (warnings)
5. options(warn = -1)
6.
7. #função que simula o quantil de uma Generalizada de Valores Extremos
8. simula_quantil_gev <- function() {
9.     cat("\n\nBem-vindo ao script para simulação de um quantil de uma
10.         Generalizada de Valores Extremos.\n

```

```

11.      Para que resulte é importante que siga todos os passos indicados.
12.      Ao executar o programa este irá pedir-lhe para preencher 8 campos. Para todas as
13.      questões que tenham mais do que uma opção de resposta, serão indicadas todas as
14.      opções de resposta possíveis.
15.      Deve responder a todas as questões directamente na consola.
16.      Para interromper a aplicação basta pressionar em qualquer momento a tecla 'ESC'.\n")
17.  o <- 1
18.  while(o != 2) {
19.    remove(list= ls())
20.    cat("\n1º - Introduza o valor para o parâmetro de forma da
21.        Generalizada de Valores Extremos (Real):\n")
22.    gama <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
23.    while(length(gama) == 0) {
24.      cat("\nOpção inválida. Introduza o valor para o parâmetro de forma da
25.          Generalizada de Valores Extremos (Real):\n")
26.      gama <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
27.    }
28.    cat("\n2º - Introduza a dimensão que pretende para as amostras (Inteiro > 1):\n")
29.    n <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
30.    while(n <= 1 || length(n) == 0) {
31.      cat("\nAs dimensões das amostras devem ser maiores que um.
32.          Introduza a dimensão que pretende para as amostras (Inteiro > 1):\n")
33.      n <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
34.    }
35.    cat("\n3º - Introduza o número de amostras que pretende (Inteiro positivo):\n")
36.    N <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
37.    while(N <= 0 || length(N) == 0) {
38.      cat("\nO número de amostras deve ser positivo.
39.          Introduza o número de amostras que pretende (Inteiro positivo):\n")
40.      N <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
41.    }
42.    cat("\n4º - Introduza a probabilidade pretendida para o quantil (Real entre 0 e 1):\n")
43.    p <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
44.    while(p <= 0 || p >= 1 || length(p) == 0) {
45.      cat("\nAs probabilidades dos quantis devem estar entre 0 e 1.
46.          Introduza a probabilidade pretendida para o quantil (Real entre 0 e 1):\n")
47.      p <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
48.    }
49.    cat("\n5º - Introduza o nível de significância para o Intervalo de Confiança
50.        (Real entre 0 e 1):\n")
51.    alfa <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
52.    while(alfa <= 0 || alfa >= 1 || length(alfa) == 0) {
53.      cat("\nO nível de significância deve estar entre 0 e 1.
54.          Introduza o nível de significância para o Intervalo de Confiança
55.          (Real entre 0 e 1):\n")
56.      alfa <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
57.    }
58.    cat("\n6º - Introduza a técnica que pretende usar:
59.        \t1 -> Método dos quantis
60.        \t2 -> Técnica das réplicas\n")
61.    v <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
62.    while( (v != 1 && v != 2) || length(v) == 0) {
63.      cat("\nIntroduza uma técnica disponível.
64.          \t1 -> Método dos quantis
65.          \t2 -> Técnica das réplicas\n")
66.      v <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
67.    }

```

```

68.     if(v == 1)
69.         tecnica <- c("quantis")
70.     if(v == 2) {
71.         cat("\n\tSelecionou a técnica das réplicas.
72.             \tIntroduza o número de réplicas que pretende (Inteiro positivo):\n")
73.         k <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
74.         while(k <= 0 || length(k) == 0) {
75.             cat("\n\tO número de réplicas deve ser positivo.
76.                 \tIntroduza o número de réplicas que pretende (Inteiro positivo):\n")
77.             k <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
78.         }
79.         tecnica <- c("replicas")
80.     }
81.     cat("\n7º - Introduza a estatística de teste que pretende usar:
82.         \t1 -> Kolmogorov-Smirnov
83.         \t2 -> Cramér-von Mises
84.         \t3 -> Stephens\n")
85.     v <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
86.     while( (v != 1 && v != 2 && v != 3) || length(v) == 0) {
87.         cat("Introduza um estatística de teste disponível.
88.             \t1 -> Kolmogorov-Smirnov
89.             \t2 -> Cramér-von Mises
90.             \t3 -> Stephens\n")
91.         v <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
92.     }
93.     if(v == 1)
94.         estatistica_teste <- c("ks")
95.     if(v == 2)
96.         estatistica_teste <- c("cvm")
97.     if(v == 3)
98.         estatistica_teste <- c("s")
99.     cat("\n8º - Introduza o método para obter estimadores desejado:
100.        \t1 -> Momentos
101.        \t2 -> Momentos probabilisticamente ponderados
102.            (com parâmetro de forma entre -1/2 e 1/2, não inclusive)
103.        \t3 -> Máxima verosimilhança\n")
104.     v <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
105.     while( (v != 1 && v != 2 && v != 3) || length(v) == 0) {
106.         cat("Introduza um método para obter estimadores disponível.
107.             \t1 -> Momentos
108.             \t2 -> Momentos probabilisticamente ponderados
109.                 (com parâmetro de forma entre -1/2 e 1/2, não inclusive)
110.             \t3 -> Máxima verosimilhança\n")
111.         v <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
112.     }
113.     if(v == 1)
114.         metodo_est <- c("m")
115.     if(v == 2)
116.         metodo_est <- c("pwm")
117.     if(v == 3)
118.         metodo_est <- c("mv")
119.
120.     #método dos momentos
121.     m <- function(data, dim) {
122.         xbar <- mean(data)
123.         s2 <- ((dim-1)/(dim))*var(data)
124.         if(gama != 0) {

```

```

125.      skewness <- sum((data-mean(data))^3/sqrt(var(data))^3)/dim
126.      f <- function(g)
127.        sign(g)*(gamma(1-3*g)-3*gamma(1-g)*gamma(1-2*g)+2*(gamma(1-g))^3)/
128.        ((sqrt(gamma(1-2*g)-(gamma(1-g))^2))^3)-skewness
129.      est_gama_aux <- uniroot(f, c(-2, 0.329), tol = 0.001)
130.      est_gama <- est_gama_aux[[1]]
131.      est_delta <- (sqrt(s2)*abs(est_gama))/
132.        (sqrt(gamma(1-2*est_gama)-(gamma(1-est_gama))^2))
133.      est_mu <- xbar +(est_delta/est_gama)*(1-gamma(1-est_gama))
134.      return(c(est_mu, est_delta, est_gama))
135.    }
136.    if(gama == 0) {
137.      est_mu <- xbar+(sqrt(6*s2)*digamma(1)/pi)
138.      est_delta <- sqrt(6)*sqrt(s2)/pi
139.      return(c(est_mu, est_delta))
140.    }
141.  }
142.
143.  #método da máxima verosimilhança
144.  mv <- function(data) {
145.    n <- length(data)
146.    sigma0 <- sqrt(6 * ((n-1)/n)* var(data))/pi
147.    mu0 <- mean(data) - 0.57722 * sigma0
148.    if(gama != 0) {
149.      xio <- 0.1
150.      theta <- c(mu0, sigma0, xio)
151.      negloglik <- function(theta, tmp) {
152.        y <- 1 + (theta[3] * (tmp - theta[1]))/theta[2]
153.        if((theta[2] < 0) || (min(y) < 0))
154.          out <- 1e+06
155.        else {
156.          term1 <- length(tmp) * logb(theta[2])
157.          term2 <- sum((1 + 1/theta[3]) * logb(y))
158.          term3 <- sum(y^(-1/theta[3]))
159.          out <- term1 + term2 + term3
160.        }
161.        out
162.      }
163.    }
164.    if(gama == 0) {
165.      theta <- c(mu0, sigma0)
166.      negloglik <- function(theta, tmp) {
167.        if(theta[2] < 0)
168.          out <- 1e+06
169.        else {
170.          term1 <- length(tmp) * log(theta[2])
171.          term2 <- sum((tmp-theta[1])/theta[2])
172.          term3 <- sum(exp(-(tmp-theta[1])/theta[2]))
173.          out <- term1 + term2 + term3
174.        }
175.        out
176.      }
177.    }
178.    fit <- optim(theta, negloglik, tmp = data)
179.    par.ests <- fit$par
180.    return (par.ests)
181.  }

```

```

182.      #método dos momentos probabilisticamente ponderados
183.      pwm <- function(data,dim) {
184.          p_i <- c()
185.          p_i <- (1:dim)/(dim+1)
186.          b0 <- mean(data)
187.          b1 <- (1/dim)*sum(p_i*data)
188.          if(gama != 0) {
189.              b2 <- (1/dim)*sum(p_i^2*data)
190.              x <- ((2*b1-b0)/(3*b2-b0))-(log(2)/log(3))
191.              est_gama <- -7.8590*x-2.9554*x^2
192.              est_delta <- (est_gama*(2*b1-b0))/(gamma(1-est_gama)*(2^(est_gama)-1))
193.              est_mu <- b0 - (est_delta*(gamma(1-est_gama)-1))/(est_gama)
194.              return(c(est_mu, est_delta, est_gama))
195.          }
196.          if(gama == 0) {
197.              est_mu <- b0 + ((2*b1-b0)/log(2))*digamma(1)
198.              est_delta <- (2*b1-b0)/log(2)
199.              return(c(est_mu, est_delta))
200.          }
201.      }
202.
203.      #estatística de teste Kolmogorov-Smirnov
204.      teste_kolmogorov_smirnov <- function(data) {
205.          x_max <- c()
206.          d <- sort(data)
207.          n <- length(d)
208.          if(metodo_est == "m")
209.              estimadores <- m(d,n)
210.          if(metodo_est == "mv")
211.              estimadores <- mv(d)
212.          if(metodo_est == "pwm") {
213.              estimadores <- pwm(d,n)
214.              if(gama!=0)
215.                  if(gamma(1-estimadores[3])=="Inf")
216.                      return(0)
217.          }
218.          est_delta <- estimadores[2]
219.          est_mu <- estimadores[1]
220.          if(gama != 0) {
221.              est_gama <- estimadores[3]
222.              for(i in 1:n)
223.                  if(pgev(d[i], est_gama, est_mu, est_delta) == "NaN")
224.                      return(0)
225.              fde <- (1:n)/n
226.              x_max[1] <- max(abs(pgev(d[1], est_gama, est_mu, est_delta)-fde[1]),
227.                             abs(pgev(d[1], est_gama, est_mu, est_delta)))
228.              for(j in 2:n)
229.                  x_max[j] <- max(abs(pgev(d[j], est_gama, est_mu, est_delta)-fde[j]),
230.                                 abs(pgev(d[j], est_gama, est_mu, est_delta)-fde[j-1]))
231.          }
232.          if(gama == 0) {
233.              fde <- (1:n)/n
234.              x_max[1] <- max( abs(exp(-exp(-(d[1]-est_mu)/est_delta))-fde[1]),
235.                             abs(exp(-exp(-(d[1]-est_mu)/est_delta))) )
236.              for(j in 2:n)
237.                  x_max[j] <- max( abs(exp(-exp(-(d[j]-est_mu)/est_delta))-fde[j]),
238.                                 abs(exp(-exp(-(d[j]-est_mu)/est_delta))-fde[j-1]) )

```

```

239.         }
240.         est_teste <- max(x_max)
241.         return(est_teste)
242.     }
243.
244.     #estadística de teste Cramer-von Mises
245.     teste_cramer_von_mises <- function(data) {
246.         d <- sort(data)
247.         n <- length(d)
248.         if(metodo_est == "m")
249.             estimadores <- m(d,n)
250.         if(metodo_est == "mv")
251.             estimadores <- mv(d)
252.         if(metodo_est == "pwm") {
253.             estimadores <- pwm(d,n)
254.             if(gama!=0)
255.                 if(gamma(1-estimadores[3])=="Inf")
256.                     return (0)
257.         }
258.         est_delta <- estimadores[2]
259.         est_mu <- estimadores[1]
260.         if(gama != 0) {
261.             est_gama <- estimadores[3]
262.             for(i in 1:n)
263.                 if(pgev(d[i], est_gama, est_mu, est_delta) == "NaN")
264.                     return (0)
265.             aux <- 0
266.             for(j in 1:n)
267.                 aux <- aux + ( ((2*j-1)/(2*n)) - pgev(d[j], est_gama, est_mu, est_delta) )^2
268.             est_teste <- (1/(12*n)) + aux
269.         }
270.         if(gama == 0) {
271.             aux <- 0
272.             for(j in 1:n)
273.                 aux <- aux + ( ((2*j-1)/(2*n)) - exp(-exp(-(d[j]-est_mu)/est_delta)) )^2
274.             est_teste <- (1/(12*n)) + aux
275.         }
276.         return(est_teste)
277.     }
278.
279.     #estadística de teste Stephens
280.     teste_stephens <- function(data) {
281.         d <- sort(data)
282.         n <- length(d)
283.         if(metodo_est == "m")
284.             estimadores <- m(d,n)
285.         if(metodo_est == "mv")
286.             estimadores <- mv(d)
287.         if(metodo_est == "pwm") {
288.             estimadores <- pwm(d,n)
289.             if(gama!=0)
290.                 if(gamma(1-estimadores[3])=="Inf")
291.                     return (0)
292.         }
293.         est_delta <- estimadores[2]
294.         est_mu <- estimadores[1]
295.         if(gama != 0) {

```

```

296.         est_gama <- estimadores[3]
297.         for(i in 1:n)
298.             if(pgev(d[i], est_gama, est_mu, est_delta) == "NaN")
299.                 return (0)
300.         soma <- pgev(d[1], est_gama, est_mu, est_delta)
301.         for(l in 2:n)
302.             soma <- soma + pgev(d[l], est_gama, est_mu, est_delta)
303.         f_barra <- soma/n
304.         aux <- (pgev(d[1], est_gama, est_mu, est_delta) - ((2*1-1)/(2*n)) - f_barra + 0.5 )^2
305.         for(j in 2:n)
306.             aux <- aux + ( pgev(d[j], est_gama, est_mu, est_delta) -
307.                           ((2*j-1)/(2*n)) - f_barra + 0.5 )^2
308.         est_teste <- (1/(12*n)) + aux
309.     }
310.     if(gama == 0) {
311.         soma <- exp(-exp(-(d[1]-est_mu)/est_delta))
312.         for(i in 2:n)
313.             soma <- soma + exp(-exp(-(d[i]-est_mu)/est_delta))
314.         f_barra <- soma/n
315.         aux <- ( exp(-exp(-(d[1]-est_mu)/est_delta)) - ((2*1-1)/(2*n)) - f_barra + 0.5 )^2
316.         for(j in 2:n)
317.             aux <- aux + ( exp(-exp(-(d[j]-est_mu)/est_delta)) -
318.                           ((2*j-1)/(2*n)) - f_barra + 0.5 )^2
319.         est_teste <- (1/(12*n)) + aux
320.     }
321.     return(est_teste)
322. }
323.
324. #método dos quantis
325. if(tecnic == "quantis") {
326.     conta_a <- 0
327.     metodo <- c()
328.     if(estatistica_teste == "ks" && gama != 0)
329.         for(i in 1:N) {
330.             amostra <- c()
331.             amostra <- ((-log(runif(n, 0, 1)))^(-gama)-1)/gama
332.             metodo[i] <- teste_kolmogorov_smirnov(amostra)
333.             while(metodo[i]==0) {
334.                 amostra <- c()
335.                 amostra <- ((-log(runif(n, 0, 1)))^(-gama)-1)/gama
336.                 metodo[i] <- teste_kolmogorov_smirnov(amostra)
337.                 conta_a <- conta_a + 1
338.             }
339.         }
340.     if(estatistica_teste == "cvm" && gama != 0)
341.         for(i in 1:N) {
342.             amostra <- c()
343.             amostra <- ((-log(runif(n, 0, 1)))^(-gama)-1)/gama
344.             metodo[i] <- teste_cramer_von_mises(amostra)
345.             while(metodo[i]==0) {
346.                 amostra <- c()
347.                 amostra <- ((-log(runif(n, 0, 1)))^(-gama)-1)/gama
348.                 metodo[i] <- teste_cramer_von_mises(amostra)
349.                 conta_a <- conta_a + 1
350.             }
351.         }
352.     if(estatistica_teste == "s" && gama != 0)

```

```

353.         for(i in 1:N) {
354.             amostra <- c()
355.             amostra <- ((-log(runif(n, 0, 1)))^(-gama)-1)/gama
356.             metodo[i] <- teste_stephens(amostra)
357.             while(metodo[i]==0) {
358.                 amostra <- c()
359.                 amostra <- ((-log(runif(n, 0, 1)))^(-gama)-1)/gama
360.                 metodo[i] <- teste_stephens(amostra)
361.                 conta_a <- conta_a + 1
362.             }
363.         }
364.     if(estatistica_teste == "ks" && gama == 0)
365.         for(i in 1:N) {
366.             amostra <- c()
367.             amostra <- -log(-log(runif(n, 0, 1)))
368.             metodo[i] <- teste_kolmogorov_smirnov(amostra)
369.         }
370.     if(estatistica_teste == "cvm" && gama == 0)
371.         for(i in 1:N) {
372.             amostra <- c()
373.             amostra <- -log(-log(runif(n, 0, 1)))
374.             metodo[i] <- teste_cramer_von_mises(amostra)
375.         }
376.     if(estatistica_teste == "s" && gama == 0)
377.         for(i in 1:N) {
378.             amostra <- c()
379.             amostra <- -log(-log(runif(n, 0, 1)))
380.             metodo[i] <- teste_stephens(amostra)
381.         }
382.     ord <- sort(metodo)
383.     quantil <- ord[trunc(N*p)+1]
384.     #Ic a alfa%
385.     r <- trunc(N*p-sqrt(N*p*(1-p))*qnorm(1-(alfa/2), 0, 1)+(1/2))
386.     s <- trunc(N*p+sqrt(N*p*(1-p))*qnorm(1-(alfa/2), 0, 1)+(1/2))
387.     precisao <- ord[s] - ord[r]
388.     cat("\nN° de amostras:", N, ";
389.         Dimensão de cada amostra:", n, ";
390.         Probabilidade do quantil:", p, ";
391.         Quantil:", quantil, ";
392.         Limite inferior do Intervalo de Confiança a", (1-alfa)*100, "%:", ord[r], ";
393.         Limite superior do Intervalo de Confiança a", (1-alfa)*100, "%:", ord[s], ";
394.         Amplitude do Intervalo de Confiança:", round(precisao, 6), ";
395.         Percentagem de amostras não admissíveis em", N+conta_a, "amostras:",
396.         conta_a/(N+conta_a)*100, "%.")
397. }
398.
399. #técnica das réplicas
400. if(tecnic == "replicas") {
401.     conta_a <- 0
402.     quantil_ord_p <- c()
403.     if(estatistica_teste == "ks" && gama != 0)
404.         for(j in 1:k) {
405.             metodo <- c()
406.             for(i in 1:N) {
407.                 amostra <- c()
408.                 amostra <- ((-log(runif(n, 0, 1)))^(-gama)-1)/gama
409.                 metodo[i] <- teste_kolmogorov_smirnov(amostra)

```



```

410.         while(metodo[i]==0) {
411.             amostra <- c()
412.             amostra <- ((-log(runif(n, 0, 1)))^(-gama)-1)/gama
413.             metodo[i] <- teste_kolmogorov_smirnov(amostra)
414.             conta_a <- conta_a + 1
415.         }
416.     }
417.     ord <- sort(metodo)
418.     quantil_ord_p[j] <- ord[trunc(N*p)+1]
419. }
420. if(estatistica_teste == "cvm" && gama != 0)
421.   for(j in 1:k) {
422.     metodo <- c()
423.     for(i in 1:N) {
424.       amostra <- c()
425.       amostra <- ((-log(runif(n, 0, 1)))^(-gama)-1)/gama
426.       metodo[i] <- teste_cramer_von_mises(amostra)
427.       while(metodo[i]==0) {
428.         amostra <- c()
429.         amostra <- ((-log(runif(n, 0, 1)))^(-gama)-1)/gama
430.         metodo[i] <- teste_cramer_von_mises(amostra)
431.         conta_a <- conta_a + 1
432.       }
433.     }
434.     ord <- sort(metodo)
435.     quantil_ord_p[j] <- ord[trunc(N*p)+1]
436.   }
437. if(estatistica_teste == "s" && gama != 0)
438.   for(j in 1:k) {
439.     metodo <- c()
440.     for(i in 1:N) {
441.       amostra <- c()
442.       amostra <- ((-log(runif(n, 0, 1)))^(-gama)-1)/gama
443.       metodo[i] <- teste_stephens(amostra)
444.       while(metodo[i]==0) {
445.         amostra <- c()
446.         amostra <- ((-log(runif(n, 0, 1)))^(-gama)-1)/gama
447.         metodo[i] <- teste_stephens(amostra)
448.         conta_a <- conta_a + 1
449.       }
450.     }
451.     ord <- sort(metodo)
452.     quantil_ord_p[j] <- ord[trunc(N*p)+1]
453.   }
454. if(estatistica_teste == "ks" && gama == 0)
455.   for(j in 1:k) {
456.     metodo <- c()
457.     for(i in 1:N) {
458.       amostra <- c()
459.       amostra <- -log(-log(runif(n, 0, 1)))
460.       metodo[i] <- teste_kolmogorov_smirnov(amostra)
461.     }
462.     ord <- sort(metodo)
463.     quantil_ord_p[j] <- ord[trunc(N*p)+1]
464.   }
465. if(estatistica_teste == "cvm" && gama == 0)
466.   for(j in 1:k) {

```

```

467.         metodo <- c()
468.         for(i in 1:N) {
469.             amostra <- c()
470.             amostra <- -log(-log(runif(n,0,1)))
471.             metodo[i] <- teste_cramer_von_mises(amostra)
472.         }
473.         ord <- sort(metodo)
474.         quantil_ord_p[j] <- ord[trunc(N*p)+1]
475.     }
476. if(estatistica_teste == "s" && gama == 0)
477.     for(j in 1:k) {
478.         metodo <- c()
479.         for(i in 1:N) {
480.             amostra <- c()
481.             amostra <- -log(-log(runif(n,0,1)))
482.             metodo[i] <- teste_stephens(amostra)
483.         }
484.         ord <- sort(metodo)
485.         quantil_ord_p[j] <- ord[trunc(N*p)+1]
486.     }
487. quantil <- mean(quantil_ord_p)
488. #Intervalo de confiança a (1-alfa)%
489. ext_inf <- quantil - qt(1-(alfa/2),k-1)* sqrt(var(quantil_ord_p)/k)
490. ext_sup <- quantil + qt(1-(alfa/2),k-1)* sqrt(var(quantil_ord_p)/k)
491. precisao <- ext_sup - ext_inf
492. cat("\nNº de réplicas:", k, ";
493.     Dimensão de cada amostra:", n, ";
494.     Probabilidade do quantil:", p, ";
495.     Quantil:", quantil, ";
496.     Limite inferior do Intervalo de Confiança a", (1-alfa)*100, "%:", ext_inf, ";
497.     Limite superior do Intervalo de Confiança a", (1-alfa)*100, "%:", ext_sup, ";
498.     Amplitude do Intervalo de Confiança:", round(precisao,6), ";
499.     Percentagem de amostras não admissíveis em", (k*N)+conta_a, "amostras:",
500.     conta_a/((k*N)+conta_a)*100, "%.")
501. }
502. cat("\n\nSelecione uma opção:
503.     \t1 -> Fazer uma nova simulação
504.     \t2 -> Sair da aplicação\n")
505. o <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
506. while( (o != 1 && o != 2) || length(o) == 0) {
507.     cat("\n\nOpção não válida. Escolha uma operação possível:
508.         \t1 -> Fazer uma nova simulação
509.         \t2 -> Sair da aplicação\n")
510.     o <- scan(file = "", what = double(0), n = 1, encoding = "latin1")
511. }
512. }
513. cat("\n\nDigite na janela da consola 'q()', e em seguida pressione 'Yes' para sair.
514.     Obrigado pela sua colaboração.
515.     Paulo Santos\n\n")
516. }

```

Apêndice B

Tabelas

Neste Apêndice iremos apresentar as tabelas de pontos críticos para a Pareto Generalizada e Generalizada de Valores Extremos. Para cada uma destas distribuições, vamos apresentar tabelas com o parâmetro de forma a variar em -0.2, 0 e 0.2, fazendo ainda para cada um destes valores do parâmetro de forma os três testes de ajustamento, tratados no Capítulo 2 (Kolmogorov-Smirnov, Cramér-von Mises e Stephens). Calculando todas as combinações possíveis ficamos então com 18 tabelas diferentes.

De salientar ainda que todas as tabelas presentes neste Apêndice, foram obtidas através do método da Secção 5.2 (com 20 réplicas de 5000 amostras cada) e usando os estimadores de máxima verosimilhança. Um última nota, para além dos quantis é apresentado a respectiva amplitude do intervalo de confiança ao nível de significância de 5%. Segue-se a legenda das tabelas:

- B.1** $GP_\gamma(x; \delta)$ com $\gamma = -0.2$ usando o teste de Kolmogorov-Smirnov
- B.2** $GP_\gamma(x; \delta)$ com $\gamma = 0$ usando o teste de Kolmogorov-Smirnov
- B.3** $GP_\gamma(x; \delta)$ com $\gamma = 0.2$ usando o teste de Kolmogorov-Smirnov
- B.4** $GP_\gamma(x; \delta)$ com $\gamma = -0.2$ usando o teste de Cramér-von Mises
- B.5** $GP_\gamma(x; \delta)$ com $\gamma = 0$ usando o teste de Cramér-von Mises
- B.6** $GP_\gamma(x; \delta)$ com $\gamma = 0.2$ usando o teste de Cramér-von Mises
- B.7** $GP_\gamma(x; \delta)$ com $\gamma = -0.2$ usando o teste de Stephens
- B.8** $GP_\gamma(x; \delta)$ com $\gamma = 0$ usando o teste de Stephens
- B.9** $GP_\gamma(x; \delta)$ com $\gamma = 0.2$ usando o teste de Stephens
- B.10** $G_\gamma(x; \xi, \delta)$ com $\gamma = -0.2$ usando o teste de Kolmogorov-Smirnov
- B.11** $G_\gamma(x; \xi, \delta)$ com $\gamma = 0$ usando o teste de Kolmogorov-Smirnov
- B.12** $G_\gamma(x; \xi, \delta)$ com $\gamma = 0.2$ usando o teste de Kolmogorov-Smirnov
- B.13** $G_\gamma(x; \xi, \delta)$ com $\gamma = -0.2$ usando o teste de Cramér-von Mises
- B.14** $G_\gamma(x; \xi, \delta)$ com $\gamma = 0$ usando o teste de Cramér-von Mises
- B.15** $G_\gamma(x; \xi, \delta)$ com $\gamma = 0.2$ usando o teste de Cramér-von Mises
- B.16** $G_\gamma(x; \xi, \delta)$ com $\gamma = -0.2$ usando o teste de Stephens
- B.17** $G_\gamma(x; \xi, \delta)$ com $\gamma = 0$ e usando o teste de Stephens
- B.18** $G_\gamma(x; \xi, \delta)$ com $\gamma = 0.2$ usando o teste de Stephens

B.1 $GP_\gamma(x; \delta)$ com $\gamma = -0.2$ Usando o Teste de Kolmogorov-Smirnov

p	0.005		0.01		0.025		0.05		0.1	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.2234	0.0009	0.2275	0.0012	0.2522	0.0034	0.2949	0.0062	0.3333	0.0001
4	0.1815	0.0028	0.1930	0.0018	0.2141	0.0025	0.2409	0.0022	0.2500	0.0001
5	0.1610	0.0021	0.1712	0.0019	0.1882	0.0018	0.2000	0.0001	0.2031	0.0012
10	0.1092	0.0013	0.1151	0.0009	0.1250	0.0012	0.1342	0.0008	0.1473	0.0009
15	0.0892	0.0010	0.0940	0.0012	0.1016	0.0013	0.1089	0.0008	0.1186	0.0007
20	0.0775	0.0010	0.0813	0.0007	0.0878	0.0007	0.0942	0.0007	0.1024	0.0009
25	0.0692	0.0008	0.0729	0.0008	0.0785	0.0006	0.0845	0.0004	0.0917	0.0006
50	0.0497	0.0006	0.0522	0.0006	0.0563	0.0004	0.0601	0.0005	0.0654	0.0004
100	0.0356	0.0006	0.0374	0.0004	0.0403	0.0003	0.0431	0.0003	0.0468	0.0003

p	0.9		0.95		0.975		0.99		0.995	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.5287	0.0023	0.5707	0.0035	0.6100	0.0039	0.7660	0.0236	0.8324	0.0100
4	0.4855	0.0035	0.5472	0.0051	0.6227	0.0110	0.7158	0.0101	0.7774	0.0152
5	0.4580	0.0025	0.5079	0.0053	0.5664	0.0099	0.6422	0.0108	0.7226	0.0232
10	0.3368	0.0026	0.3770	0.0037	0.4131	0.0050	0.4574	0.0070	0.4893	0.0063
15	0.2637	0.0022	0.3064	0.0029	0.3496	0.0044	0.3725	0.0048	0.3975	0.0075
20	0.2116	0.0018	0.2441	0.0028	0.2816	0.0042	0.3088	0.0051	0.3334	0.0055
25	0.1815	0.0015	0.2050	0.0023	0.2332	0.0038	0.2583	0.0042	0.2853	0.0068
50	0.1241	0.0008	0.1361	0.0012	0.1478	0.0011	0.1600	0.0018	0.1715	0.0029
100	0.0882	0.0004	0.0963	0.0006	0.1042	0.0012	0.1138	0.0014	0.1205	0.0020

B.2 $GP_\gamma(x; \delta)$ com $\gamma = 0$ Usando o Teste de Kolmogorov-Smirnov

p	0.005		0.01		0.025		0.05		0.1	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.2082	0.0007	0.2111	0.0007	0.2185	0.0009	0.2303	0.0013	0.2548	0.0021
4	0.1672	0.0012	0.1737	0.0023	0.1912	0.0017	0.2074	0.0013	0.2284	0.0014
5	0.1507	0.0019	0.1606	0.0017	0.1753	0.0018	0.1885	0.0015	0.2055	0.0013
10	0.1101	0.0016	0.1158	0.0015	0.1263	0.0010	0.1356	0.0010	0.1488	0.0010
15	0.0915	0.0013	0.0961	0.0011	0.1043	0.0008	0.1124	0.0006	0.1229	0.0006
20	0.0801	0.0011	0.0844	0.0010	0.0912	0.0008	0.0983	0.0007	0.1073	0.0008
25	0.0726	0.0007	0.0761	0.0007	0.0819	0.0007	0.0886	0.0006	0.0965	0.0005
50	0.0519	0.0009	0.0546	0.0006	0.0591	0.0005	0.0636	0.0005	0.0693	0.0003
100	0.0370	0.0006	0.0392	0.0005	0.0424	0.0004	0.0455	0.0004	0.0496	0.0003

p	0.9		0.95		0.975		0.99		0.995	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.5107	0.0026	0.5509	0.0027	0.5772	0.0024	0.6015	0.0023	0.6114	0.0027
4	0.4438	0.0018	0.4854	0.0028	0.5202	0.0034	0.5583	0.0054	0.5780	0.0044
5	0.4051	0.0023	0.4427	0.0032	0.4743	0.0045	0.5130	0.0052	0.5374	0.0045
10	0.2958	0.0016	0.3243	0.0023	0.3503	0.0026	0.3811	0.0042	0.4040	0.0045
15	0.2443	0.0015	0.2689	0.0018	0.2901	0.0022	0.3174	0.0032	0.3368	0.0043
20	0.2131	0.0013	0.2346	0.0016	0.2541	0.0023	0.2780	0.0036	0.2928	0.0033
25	0.1919	0.0010	0.2106	0.0014	0.2286	0.0017	0.2488	0.0022	0.2642	0.0038
50	0.1370	0.0009	0.1507	0.0015	0.1635	0.0010	0.1787	0.0022	0.1885	0.0023
100	0.0978	0.0004	0.1077	0.0007	0.1167	0.0009	0.1280	0.0015	0.1356	0.0019

B.3 $GP_\gamma(x; \delta)$ com $\gamma = 0.2$ Usando o Teste de Kolmogorov-Smirnov

p	0.005		0.01		0.025		0.05		0.1	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.2196	0.0007	0.2228	0.0008	0.2291	0.0010	0.2515	0.0033	0.3030	0.0034
4	0.1710	0.0011	0.1761	0.0016	0.1936	0.0022	0.2117	0.0016	0.2369	0.0015
5	0.1477	0.0021	0.1561	0.0017	0.1708	0.0017	0.1847	0.0016	0.2000	0.0002
10	0.1035	0.0012	0.1088	0.0016	0.1179	0.0009	0.1263	0.0010	0.1373	0.0008
15	0.0852	0.0009	0.0895	0.0010	0.0965	0.0008	0.1034	0.0006	0.1119	0.0007
20	0.0741	0.0007	0.0777	0.0010	0.0839	0.0008	0.0898	0.0006	0.0973	0.0006
25	0.0668	0.0009	0.0701	0.0007	0.0753	0.0005	0.0808	0.0005	0.0875	0.0004
50	0.0482	0.0005	0.0507	0.0006	0.0543	0.0005	0.0580	0.0005	0.0627	0.0003
100	0.0346	0.0005	0.0363	0.0004	0.0390	0.0004	0.0416	0.0004	0.0450	0.0003

p	0.9		0.95		0.975		0.99		0.995	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.5250	0.0024	0.5614	0.0029	0.5933	0.0032	0.6388	0.0141	0.7982	0.0200
4	0.4757	0.0025	0.5238	0.0048	0.5793	0.0062	0.6586	0.0116	0.7113	0.0151
5	0.4441	0.0028	0.4883	0.0043	0.5323	0.0069	0.5970	0.0083	0.6500	0.0160
10	0.3047	0.0033	0.3528	0.0031	0.3923	0.0044	0.4295	0.0048	0.4590	0.0073
15	0.2208	0.0015	0.2535	0.0029	0.2899	0.0035	0.3355	0.0070	0.3762	0.0063
20	0.1842	0.0011	0.2047	0.0019	0.2256	0.0022	0.2590	0.0044	0.2932	0.0068
25	0.1633	0.0008	0.1801	0.0011	0.1946	0.0021	0.2159	0.0032	0.2374	0.0046
50	0.1156	0.0008	0.1262	0.0008	0.1355	0.0010	0.1479	0.0014	0.1572	0.0024
100	0.0823	0.0005	0.0898	0.0006	0.0962	0.0006	0.1048	0.0012	0.1105	0.0014

B.4 $GP_\gamma(x; \delta)$ com $\gamma = -0.2$ Usando o Teste de Cramér-von Mises

p	0.005		0.01		0.025		0.05		0.1	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.0332	0.0005	0.0350	0.0006	0.0401	0.0009	0.0510	0.0013	0.0577	0.0004
4	0.0277	0.0006	0.0299	0.0006	0.0355	0.0007	0.0399	0.0004	0.0458	0.0004
5	0.0249	0.0006	0.0273	0.0007	0.0313	0.0006	0.0352	0.0004	0.0416	0.0005
10	0.0195	0.0005	0.0216	0.0005	0.0252	0.0004	0.0290	0.0005	0.0349	0.0005
15	0.0181	0.0004	0.0201	0.0004	0.0233	0.0004	0.0268	0.0004	0.0324	0.0003
20	0.0175	0.0004	0.0194	0.0005	0.0225	0.0005	0.0262	0.0004	0.0309	0.0004
25	0.0170	0.0004	0.0188	0.0004	0.0221	0.0005	0.0255	0.0005	0.0306	0.0004
50	0.0166	0.0005	0.0184	0.0005	0.0215	0.0004	0.0249	0.0004	0.0297	0.0003
100	0.0161	0.0005	0.0181	0.0005	0.0211	0.0004	0.0247	0.0004	0.0296	0.0004

p	0.9		0.95		0.975		0.99		0.995	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.1919	0.0015	0.2263	0.0034	0.2662	0.0053	0.4002	0.0178	0.5453	0.0517
4	0.2156	0.0022	0.2795	0.0048	0.4007	0.0284	0.4452	0.0159	0.5077	0.0212
5	0.2348	0.0033	0.3085	0.0072	0.5637	0.1620	0.4810	0.0142	0.5601	0.0167
10	0.2670	0.0053	0.3624	0.0070	0.4939	0.0245	0.5236	0.0152	0.6178	0.0274
15	0.2265	0.0051	0.3301	0.0077	0.4631	0.0183	0.5184	0.0149	0.6074	0.0253
20	0.1710	0.0042	0.2613	0.0090	0.3880	0.0144	0.4759	0.0223	0.5793	0.0257
25	0.1486	0.0023	0.2072	0.0050	0.2979	0.0135	0.4015	0.0153	0.5042	0.0240
50	0.1319	0.0015	0.1645	0.0023	0.2006	0.0045	0.2453	0.0074	0.2885	0.0125
100	0.1311	0.0017	0.1616	0.0025	0.1965	0.0026	0.2407	0.0065	0.2773	0.0068

B.5 $GP_\gamma(x; \delta)$ com $\gamma = 0$ Usando o Teste de Cramér-von Mises

p	0.005		0.01		0.025		0.05		0.1	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.0303	0.0002	0.0309	0.0003	0.0323	0.0003	0.0346	0.0004	0.0395	0.0004
4	0.0242	0.0003	0.0256	0.0004	0.0285	0.0004	0.0325	0.0005	0.0383	0.0005
5	0.0220	0.0005	0.0239	0.0006	0.0275	0.0004	0.0316	0.0006	0.0377	0.0004
10	0.0198	0.0005	0.0218	0.0005	0.0255	0.0005	0.0298	0.0004	0.0356	0.0004
15	0.0192	0.0007	0.0211	0.0004	0.0250	0.0005	0.0292	0.0005	0.0351	0.0005
20	0.0186	0.0005	0.0206	0.0005	0.0246	0.0005	0.0289	0.0005	0.0347	0.0005
25	0.0187	0.0007	0.0205	0.0007	0.0247	0.0005	0.0286	0.0005	0.0345	0.0005
50	0.0184	0.0005	0.0202	0.0006	0.0243	0.0004	0.0283	0.0005	0.0343	0.0005
100	0.0184	0.0006	0.0201	0.0005	0.0241	0.0005	0.0280	0.0005	0.0341	0.0005

p	0.9		0.95		0.975		0.99		0.995	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.1709	0.0027	0.2065	0.0024	0.2333	0.0022	0.2577	0.0041	0.2712	0.0031
4	0.1679	0.0018	0.2063	0.0035	0.2437	0.0040	0.2898	0.0063	0.3200	0.0055
5	0.1700	0.0027	0.2107	0.0030	0.2518	0.0043	0.3004	0.0068	0.3374	0.0093
10	0.1735	0.0027	0.2150	0.0035	0.2605	0.0061	0.3179	0.0087	0.3704	0.0138
15	0.1742	0.0027	0.2174	0.0031	0.2645	0.0062	0.3277	0.0075	0.3818	0.0131
20	0.1732	0.0021	0.2205	0.0029	0.2650	0.0062	0.3261	0.0092	0.3850	0.0110
25	0.1728	0.0025	0.2210	0.0029	0.2663	0.0047	0.3354	0.0086	0.3869	0.0112
50	0.1734	0.0024	0.2217	0.0040	0.2681	0.0052	0.3358	0.0091	0.3826	0.0155
100	0.1742	0.0024	0.2230	0.0037	0.2699	0.0056	0.3368	0.0091	0.3889	0.0137

B.6 $GP_\gamma(x; \delta)$ com $\gamma = 0.2$ Usando o Teste de Cramér-von Mises

p	0.005		0.01		0.025		0.05		0.1	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.0321	0.0003	0.0329	0.0003	0.0355	0.0006	0.0401	0.0005	0.0527	0.0012
4	0.0253	0.0005	0.0268	0.0004	0.0300	0.0005	0.0345	0.0006	0.0405	0.0006
5	0.0221	0.0005	0.0238	0.0004	0.0272	0.0004	0.0308	0.0005	0.0364	0.0005
10	0.0175	0.0005	0.0192	0.0006	0.0223	0.0004	0.0254	0.0004	0.0300	0.0004
15	0.0165	0.0004	0.0181	0.0004	0.0210	0.0004	0.0241	0.0004	0.0285	0.0004
20	0.0161	0.0004	0.0176	0.0004	0.0206	0.0003	0.0237	0.0003	0.0277	0.0004
25	0.0158	0.0005	0.0174	0.0003	0.0203	0.0003	0.0233	0.0003	0.0276	0.0005
50	0.0152	0.0004	0.0170	0.0004	0.0200	0.0005	0.0229	0.0004	0.0271	0.0004
100	0.0154	0.0006	0.0169	0.0005	0.0199	0.0003	0.0226	0.0002	0.0270	0.0003

p	0.9		0.95		0.975		0.99		0.995	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.1913	0.0012	0.2203	0.0029	0.2531	0.0037	0.3276	0.0229	0.4386	0.0257
4	0.2084	0.0020	0.2556	0.0041	0.3176	0.0076	0.3875	0.0086	0.4544	0.0178
5	0.2211	0.0024	0.2711	0.0042	0.3503	0.0150	0.4258	0.0123	0.4993	0.0141
10	0.1994	0.0037	0.2887	0.0051	0.3734	0.0080	0.4570	0.0181	0.5413	0.0219
15	0.1341	0.0026	0.1924	0.0059	0.2985	0.0110	0.4239	0.0188	0.5491	0.0339
20	0.1199	0.0018	0.1537	0.0027	0.2012	0.0075	0.2982	0.0194	0.4312	0.0262
25	0.1153	0.0015	0.1439	0.0025	0.1776	0.0040	0.2305	0.0071	0.2927	0.0213
50	0.1117	0.0017	0.1374	0.0019	0.1639	0.0029	0.2023	0.0060	0.2334	0.0073
100	0.1110	0.0016	0.1375	0.0022	0.1630	0.0035	0.2001	0.0060	0.2282	0.0074

B.7 $GP_\gamma(x; \delta)$ com $\gamma = -0.2$ Usando o Teste de Stephens

p	0.005		0.01		0.025		0.05		0.1	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.0327	0.0003	0.0340	0.0004	0.0369	0.0004	0.0402	0.0004	0.0447	0.0004
4	0.0267	0.0004	0.0282	0.0003	0.0313	0.0004	0.0348	0.0004	0.0408	0.0005
5	0.0234	0.0006	0.0253	0.0004	0.0285	0.0006	0.0325	0.0006	0.0385	0.0005
10	0.0184	0.0005	0.0202	0.0004	0.0236	0.0004	0.0270	0.0004	0.0322	0.0005
15	0.0173	0.0004	0.0188	0.0005	0.0220	0.0004	0.0252	0.0005	0.0298	0.0004
20	0.0167	0.0005	0.0183	0.0003	0.0212	0.0003	0.0243	0.0004	0.0290	0.0004
25	0.0162	0.0004	0.0180	0.0003	0.0210	0.0004	0.0239	0.0004	0.0284	0.0004
50	0.0160	0.0005	0.0174	0.0003	0.0203	0.0004	0.0234	0.0004	0.0279	0.0005
100	0.0155	0.0005	0.0175	0.0005	0.0202	0.0003	0.0232	0.0004	0.0277	0.0004

p	0.9		0.95		0.975		0.99		0.995	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.1545	0.0010	0.1710	0.0013	0.1882	0.0023	0.1985	0.0019	0.2092	0.0019
4	0.1592	0.0016	0.1897	0.0029	0.2006	0.0020	0.2214	0.0032	0.2369	0.0036
5	0.1587	0.0016	0.1962	0.0035	0.2087	0.0032	0.2396	0.0032	0.2591	0.0037
10	0.1482	0.0020	0.1883	0.0028	0.2433	0.0092	0.2539	0.0052	0.2808	0.0054
15	0.1345	0.0021	0.1733	0.0032	0.2218	0.0079	0.2471	0.0046	0.2838	0.0058
20	0.1253	0.0019	0.1604	0.0027	0.2020	0.0051	0.2344	0.0058	0.2702	0.0067
25	0.1201	0.0012	0.1506	0.0018	0.1850	0.0050	0.2253	0.0068	0.2584	0.0101
50	0.1149	0.0016	0.1417	0.0019	0.1694	0.0036	0.2018	0.0057	0.2299	0.0081
100	0.1146	0.0009	0.1417	0.0019	0.1698	0.0036	0.2053	0.0041	0.2312	0.0068

B.8 $GP_\gamma(x; \delta)$ com $\gamma = 0$ Usando o Teste de Stephens

p	0.005		0.01		0.025		0.05		0.1	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.0282	0.0001	0.0285	0.0002	0.0296	0.0003	0.0316	0.0002	0.0353	0.0003
4	0.0227	0.0003	0.0236	0.0004	0.0260	0.0005	0.0292	0.0004	0.0341	0.0004
5	0.0204	0.0005	0.0218	0.0004	0.0249	0.0004	0.0284	0.0005	0.0335	0.0005
10	0.0180	0.0005	0.0200	0.0004	0.0232	0.0004	0.0264	0.0004	0.0314	0.0004
15	0.0174	0.0005	0.0192	0.0004	0.0226	0.0004	0.0259	0.0003	0.0308	0.0003
20	0.0169	0.0005	0.0190	0.0004	0.0222	0.0004	0.0256	0.0005	0.0304	0.0003
25	0.0169	0.0005	0.0189	0.0004	0.0219	0.0004	0.0253	0.0004	0.0304	0.0004
50	0.0166	0.0005	0.0187	0.0005	0.0216	0.0004	0.0251	0.0004	0.0298	0.0005
100	0.0166	0.0005	0.0181	0.0004	0.0215	0.0005	0.0249	0.0004	0.0299	0.0004

p	0.9		0.95		0.975		0.99		0.995	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.1292	0.0017	0.1577	0.0019	0.1799	0.0023	0.2017	0.0029	0.2156	0.0034
4	0.1290	0.0014	0.1546	0.0031	0.1803	0.0027	0.2125	0.0045	0.2364	0.0061
5	0.1287	0.0021	0.1551	0.0026	0.1819	0.0023	0.2161	0.0051	0.2404	0.0061
10	0.1287	0.0016	0.1571	0.0022	0.1848	0.0038	0.2256	0.0045	0.2507	0.0045
15	0.1288	0.0016	0.1575	0.0023	0.1870	0.0031	0.2269	0.0058	0.2563	0.0070
20	0.1288	0.0015	0.1576	0.0021	0.1868	0.0046	0.2271	0.0052	0.2570	0.0058
25	0.1290	0.0017	0.1585	0.0023	0.1892	0.0033	0.2265	0.0047	0.2585	0.0083
50	0.1285	0.0024	0.1584	0.0020	0.1870	0.0035	0.2291	0.0050	0.2593	0.0083
100	0.1288	0.0023	0.1584	0.0022	0.1887	0.0033	0.2290	0.0049	0.2584	0.0083

B.9 $GP_\gamma(x; \delta)$ com $\gamma = 0.2$ Usando o Teste de Stephens

p	0.005		0.01		0.025		0.05		0.1	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.0318	0.0002	0.0327	0.0003	0.0349	0.0003	0.0379	0.0003	0.0427	0.0004
4	0.0252	0.0004	0.0264	0.0003	0.0290	0.0003	0.0322	0.0003	0.0374	0.0005
5	0.0219	0.0005	0.0232	0.0005	0.0259	0.0005	0.0293	0.0005	0.0346	0.0005
10	0.0171	0.0005	0.0187	0.0004	0.0216	0.0003	0.0246	0.0004	0.0290	0.0004
15	0.0162	0.0005	0.0177	0.0004	0.0205	0.0004	0.0235	0.0003	0.0274	0.0003
20	0.0156	0.0005	0.0173	0.0004	0.0201	0.0004	0.0229	0.0004	0.0271	0.0004
25	0.0155	0.0004	0.0171	0.0003	0.0197	0.0004	0.0227	0.0003	0.0266	0.0003
50	0.0151	0.0005	0.0166	0.0004	0.0194	0.0004	0.0222	0.0003	0.0264	0.0004
100	0.0150	0.0005	0.0167	0.0005	0.0193	0.0003	0.0220	0.0004	0.0262	0.0003

p	0.9		0.95		0.975		0.99		0.995	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.1556	0.0011	0.1719	0.0011	0.1850	0.0012	0.2005	0.0019	0.2078	0.0021
4	0.1535	0.0013	0.1776	0.0020	0.1982	0.0022	0.2216	0.0037	0.2369	0.0037
5	0.1499	0.0016	0.1762	0.0023	0.2023	0.0021	0.2304	0.0030	0.2539	0.0048
10	0.1269	0.0018	0.1609	0.0028	0.1936	0.0029	0.2338	0.0044	0.2614	0.0092
15	0.1140	0.0016	0.1420	0.0026	0.1752	0.0041	0.2226	0.0080	0.2680	0.0115
20	0.1082	0.0013	0.1340	0.0021	0.1611	0.0032	0.1996	0.0050	0.2357	0.0083
25	0.1067	0.0015	0.1301	0.0016	0.1582	0.0022	0.1933	0.0045	0.2220	0.0061
50	0.1047	0.0008	0.1283	0.0021	0.1537	0.0029	0.1857	0.0043	0.2124	0.0067
100	0.1054	0.0015	0.1291	0.0021	0.1537	0.0028	0.1877	0.0038	0.2136	0.0070

B.10 $G_\gamma(x; \xi, \delta)$ com $\gamma = -0.2$ Usando o Teste de Kolmogorov-Smirnov

p	0.005		0.01		0.025		0.05		0.1	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.2247	0.0003	0.2256	0.0003	0.2277	0.0004	0.2337	0.0015	0.3327	0.0003
4	0.1670	0.0003	0.1685	0.0004	0.1708	0.0004	0.1751	0.0006	0.1893	0.0017
5	0.1353	0.0004	0.1377	0.0008	0.1443	0.0009	0.1546	0.0014	0.1725	0.0013
10	0.0969	0.0014	0.1023	0.0009	0.1091	0.0009	0.1164	0.0007	0.1244	0.0006
15	0.0804	0.0008	0.0844	0.0007	0.0902	0.0005	0.0959	0.0005	0.1035	0.0005
20	0.0702	0.0008	0.0738	0.0010	0.0791	0.0006	0.0841	0.0005	0.0906	0.0006
25	0.0635	0.0005	0.0667	0.0005	0.0712	0.0005	0.0760	0.0005	0.0817	0.0005
50	0.0461	0.0006	0.0483	0.0006	0.0518	0.0004	0.0551	0.0003	0.0594	0.0003
100	0.0331	0.0004	0.0346	0.0004	0.0373	0.0003	0.0396	0.0003	0.0427	0.0003

p	0.9		0.95		0.975		0.99		0.995	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.6667	0.0001	0.6667	0.0001	0.6667	0.0001	0.6667	0.0001	0.6667	0.0001
4	0.4326	0.0031	0.4773	0.0063	0.7191	0.0194	0.7496	0.0002	0.7499	0.0001
5	0.3623	0.0034	0.4114	0.0035	0.4414	0.0036	0.4765	0.0064	0.5696	0.0477
10	0.2223	0.0012	0.2442	0.0019	0.2646	0.0025	0.2911	0.0022	0.3160	0.0062
15	0.1829	0.0009	0.1986	0.0016	0.2143	0.0017	0.2357	0.0030	0.2502	0.0045
20	0.1601	0.0008	0.1735	0.0008	0.1862	0.0012	0.2011	0.0020	0.2135	0.0029
25	0.1444	0.0007	0.1561	0.0011	0.1671	0.0012	0.1808	0.0021	0.1896	0.0024
50	0.1045	0.0005	0.1132	0.0007	0.1207	0.0008	0.1307	0.0018	0.1370	0.0012
100	0.0752	0.0004	0.0817	0.0005	0.0871	0.0008	0.0941	0.0010	0.0988	0.0016

B.11 $G_\gamma(x; \xi, \delta)$ com $\gamma = 0$ Usando o Teste de Kolmogorov-Smirnov

p	0.005		0.01		0.025		0.05		0.1	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.2243	0.0002	0.2246	0.0002	0.2255	0.0002	0.2270	0.0003	0.2298	0.0003
4	0.1676	0.0004	0.1693	0.0004	0.1731	0.0006	0.1801	0.0011	0.1952	0.0012
5	0.1386	0.0008	0.1436	0.0013	0.1538	0.0011	0.1665	0.0011	0.1839	0.0012
10	0.1029	0.0015	0.1073	0.0011	0.1155	0.0009	0.1230	0.0008	0.1333	0.0007
15	0.0843	0.0010	0.0889	0.0006	0.0951	0.0008	0.1021	0.0006	0.1101	0.0007
20	0.0737	0.0008	0.0774	0.0007	0.0836	0.0008	0.0891	0.0006	0.0963	0.0004
25	0.0665	0.0007	0.0695	0.0006	0.0747	0.0004	0.0803	0.0006	0.0867	0.0005
50	0.0480	0.0006	0.0504	0.0005	0.0542	0.0004	0.0578	0.0004	0.0622	0.0005
100	0.0346	0.0004	0.0360	0.0005	0.0387	0.0004	0.0413	0.0003	0.0447	0.0003

p	0.9		0.95		0.975		0.99		0.995	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.4017	0.0008	0.4129	0.0006	0.4240	0.0010	0.4317	0.0008	0.4344	0.0004
4	0.3512	0.0023	0.3840	0.0019	0.4095	0.0022	0.4306	0.0027	0.4439	0.0025
5	0.3276	0.0018	0.3521	0.0019	0.3702	0.0017	0.3957	0.0034	0.4150	0.0037
10	0.2402	0.0010	0.2613	0.0014	0.2789	0.0019	0.3001	0.0029	0.3148	0.0038
15	0.1996	0.0012	0.2171	0.0011	0.2316	0.0018	0.2519	0.0021	0.2639	0.0039
20	0.1749	0.0008	0.1900	0.0013	0.2037	0.0014	0.2203	0.0022	0.2315	0.0035
25	0.1573	0.0010	0.1709	0.0012	0.1831	0.0013	0.1975	0.0013	0.2084	0.0035
50	0.1126	0.0007	0.1228	0.0009	0.1318	0.0011	0.1420	0.0014	0.1500	0.0014
100	0.0806	0.0004	0.0875	0.0007	0.0941	0.0007	0.1017	0.0009	0.1075	0.0016

B.12 $G_\gamma(x; \xi, \delta)$ com $\gamma = 0.2$ Usando o Teste de Kolmogorov-Smirnov

p	0.005		0.01		0.025		0.05		0.1	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.2247	0.0002	0.2254	0.0003	0.2277	0.0004	0.2355	0.0094	0.3323	0.0002
4	0.1669	0.0004	0.1684	0.0003	0.1708	0.0003	0.1745	0.0005	0.1872	0.0011
5	0.1352	0.0005	0.1371	0.0005	0.1425	0.0008	0.1526	0.0011	0.1674	0.0012
10	0.0959	0.0010	0.1003	0.0008	0.1072	0.0008	0.1142	0.0006	0.1224	0.0007
15	0.0799	0.0008	0.0835	0.0008	0.0889	0.0009	0.0945	0.0004	0.1019	0.0005
20	0.0696	0.0008	0.0728	0.0007	0.0783	0.0006	0.0832	0.0005	0.0895	0.0005
25	0.0628	0.0008	0.0660	0.0007	0.0704	0.0004	0.0751	0.0004	0.0809	0.0005
50	0.0455	0.0006	0.0477	0.0006	0.0512	0.0004	0.0545	0.0004	0.0588	0.0003
100	0.0328	0.0004	0.0344	0.0004	0.0370	0.0003	0.0394	0.0003	0.0423	0.0003

p	0.9		0.95		0.975		0.99		0.995	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.6667	0.0001	0.6667	0.0001	0.6667	0.0001	0.6667	0.0001	0.6667	0.0001
4	0.4559	0.0030	0.6689	0.0417	0.7491	0.0004	0.7499	0.0001	0.7499	0.0001
5	0.3987	0.0027	0.4346	0.0022	0.4639	0.0043	0.5773	0.0233	0.6970	0.0161
10	0.2161	0.0011	0.2365	0.0019	0.2568	0.0027	0.2863	0.0062	0.3121	0.0083
15	0.1789	0.0014	0.1929	0.0012	0.2076	0.0021	0.2249	0.0026	0.2385	0.0037
20	0.1569	0.0008	0.1689	0.0011	0.1808	0.0013	0.1955	0.0019	0.2053	0.0021
25	0.1414	0.0010	0.1534	0.0008	0.1635	0.0014	0.1762	0.0017	0.1851	0.0020
50	0.1030	0.0006	0.1113	0.0006	0.1192	0.0010	0.1284	0.0014	0.1349	0.0018
100	0.0741	0.0005	0.0803	0.0005	0.0855	0.0007	0.0922	0.0009	0.0973	0.0011

B.13 $G_\gamma(x; \xi, \delta)$ com $\gamma = -0.2$ Usando o Teste de Cramér-von Mises

p	0.005		0.01		0.025		0.05		0.1	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.0345	0.0001	0.0345	0.0001	0.0348	0.0002	0.0364	0.0016	0.0571	0.0003
4	0.0245	0.0001	0.0247	0.0001	0.0254	0.0002	0.0265	0.0002	0.0295	0.0003
5	0.0197	0.0001	0.0202	0.0002	0.0216	0.0003	0.0235	0.0003	0.0270	0.0003
10	0.0152	0.0003	0.0164	0.0004	0.0188	0.0004	0.0209	0.0003	0.0242	0.0002
15	0.0145	0.0005	0.0158	0.0004	0.0180	0.0003	0.0204	0.0003	0.0236	0.0003
20	0.0142	0.0005	0.0155	0.0004	0.0178	0.0003	0.0202	0.0003	0.0235	0.0003
25	0.0141	0.0004	0.0154	0.0004	0.0178	0.0003	0.0201	0.0003	0.0235	0.0003
50	0.0140	0.0004	0.0152	0.0004	0.0176	0.0003	0.0202	0.0004	0.0235	0.0004
100	0.0139	0.0005	0.0153	0.0004	0.0178	0.0004	0.0202	0.0004	0.0236	0.0004

p	0.9		0.95		0.975		0.99		0.995	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.3197	0.0004	0.3239	0.0004	0.3265	0.0004	0.3289	0.0003	0.3300	0.0004
4	0.1490	0.0016	0.1845	0.0042	0.5376	0.0386	0.5784	0.0004	0.5795	0.0003
5	0.1294	0.0022	0.1613	0.0015	0.1861	0.0029	0.2325	0.0131	0.4277	0.0810
10	0.0852	0.0012	0.1059	0.0015	0.1280	0.0027	0.1599	0.0031	0.1812	0.0039
15	0.0822	0.0010	0.1001	0.0013	0.1192	0.0022	0.1480	0.0050	0.1726	0.0061
20	0.0822	0.0010	0.0987	0.0016	0.1167	0.0021	0.1405	0.0034	0.1622	0.0045
25	0.0825	0.0011	0.0995	0.0011	0.1171	0.0021	0.1393	0.0032	0.1609	0.0053
50	0.0844	0.0008	0.1012	0.0010	0.1198	0.0015	0.1424	0.0025	0.1605	0.0040
100	0.0865	0.0011	0.1040	0.0014	0.1220	0.0018	0.1466	0.0038	0.1630	0.0048

B.14 $G_\gamma(x; \xi, \delta)$ com $\gamma = 0$ Usando o Teste de Cramér-von Mises

p	0.005		0.01		0.025		0.05		0.1	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.0345	0.0001	0.0345	0.0001	0.0345	0.0001	0.0347	0.0001	0.0353	0.0001
4	0.0247	0.0001	0.0250	0.0002	0.0259	0.0002	0.0274	0.0002	0.0305	0.0003
5	0.0203	0.0002	0.0212	0.0003	0.0233	0.0004	0.0258	0.0003	0.0299	0.0004
10	0.0168	0.0003	0.0183	0.0003	0.0210	0.0003	0.0238	0.0004	0.0280	0.0004
15	0.0161	0.0004	0.0177	0.0004	0.0204	0.0004	0.0232	0.0003	0.0274	0.0003
20	0.0159	0.0005	0.0174	0.0004	0.0202	0.0003	0.0229	0.0003	0.0270	0.0003
25	0.0155	0.0004	0.0170	0.0004	0.0199	0.0004	0.0227	0.0004	0.0267	0.0004
50	0.0153	0.0005	0.0168	0.0005	0.0195	0.0004	0.0225	0.0004	0.0264	0.0004
100	0.0151	0.0004	0.0167	0.0006	0.0194	0.0004	0.0223	0.0004	0.0263	0.0004

p	0.9		0.95		0.975		0.99		0.995	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.0952	0.0005	0.1017	0.0004	0.1085	0.0007	0.1131	0.0004	0.1148	0.0004
4	0.0966	0.0009	0.1121	0.0011	0.1289	0.0017	0.1462	0.0021	0.1559	0.0019
5	0.0983	0.0010	0.1147	0.0013	0.1308	0.0018	0.1527	0.0028	0.1697	0.0040
10	0.1001	0.0015	0.1197	0.0018	0.1390	0.0020	0.1656	0.0033	0.1856	0.0057
15	0.1010	0.0008	0.1215	0.0020	0.1422	0.0021	0.1692	0.0041	0.1887	0.0063
20	0.1009	0.0015	0.1225	0.0018	0.1434	0.0030	0.1703	0.0036	0.1928	0.0047
25	0.1012	0.0013	0.1222	0.0018	0.1438	0.0025	0.1717	0.0045	0.1931	0.0047
50	0.1015	0.0014	0.1231	0.0017	0.1455	0.0030	0.1724	0.0040	0.1945	0.0052
100	0.1017	0.0009	0.1235	0.0022	0.1456	0.0026	0.1741	0.0033	0.1956	0.0066

B.15 $G_\gamma(x; \xi, \delta)$ com $\gamma = 0.2$ Usando o Teste de Cramér-von Mises

p	0.005		0.01		0.025		0.05		0.1	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.0345	0.0001	0.0345	0.0001	0.0348	0.0001	0.0362	0.0004	0.0575	0.0002
4	0.0245	0.0001	0.0247	0.0001	0.0253	0.0002	0.0264	0.0002	0.0290	0.0003
5	0.0196	0.0002	0.0201	0.0002	0.0212	0.0002	0.0229	0.0003	0.0259	0.0004
10	0.0147	0.0003	0.0160	0.0003	0.0180	0.0003	0.0202	0.0003	0.0232	0.0003
15	0.0141	0.0005	0.0154	0.0004	0.0175	0.0003	0.0197	0.0003	0.0228	0.0003
20	0.0141	0.0003	0.0151	0.0004	0.0175	0.0003	0.0197	0.0004	0.0227	0.0003
25	0.0138	0.0004	0.0151	0.0004	0.0174	0.0003	0.0197	0.0003	0.0227	0.0003
50	0.0135	0.0004	0.0150	0.0003	0.0173	0.0003	0.0196	0.0003	0.0228	0.0004
100	0.0136	0.0004	0.0149	0.0004	0.0173	0.0003	0.0196	0.0003	0.0230	0.0003

p	0.9		0.95		0.975		0.99		0.995	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.3221	0.0003	0.3254	0.0003	0.3276	0.0002	0.3297	0.0003	0.3305	0.0003
4	0.1680	0.0029	0.4401	0.0435	0.5774	0.0005	0.5794	0.0002	0.5800	0.0002
5	0.1546	0.0021	0.1814	0.0024	0.2129	0.0042	0.4525	0.0392	0.6211	0.0344
10	0.0771	0.0011	0.0961	0.0015	0.1179	0.0024	0.1524	0.0060	0.1946	0.0104
15	0.0769	0.0009	0.0920	0.0013	0.1073	0.0018	0.1295	0.0027	0.1496	0.0056
20	0.0777	0.0009	0.0929	0.0013	0.1070	0.0015	0.1293	0.0033	0.1451	0.0039
25	0.0783	0.0009	0.0937	0.0013	0.1089	0.0022	0.1300	0.0027	0.1484	0.0056
50	0.0805	0.0009	0.0972	0.0015	0.1134	0.0019	0.1365	0.0037	0.1540	0.0042
100	0.0812	0.0008	0.0978	0.0017	0.1148	0.0022	0.1367	0.0027	0.1550	0.0050

B.16 $G_\gamma(x; \xi, \delta)$ com $\gamma = -0.2$ Usando o Teste de Stephens

p	0.005		0.01		0.025		0.05		0.1	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.0310	0.0003	0.0318	0.0002	0.0333	0.0002	0.0345	0.0001	0.0354	0.0001
4	0.0235	0.0002	0.0243	0.0001	0.0248	0.0001	0.0257	0.0002	0.0277	0.0003
5	0.0193	0.0001	0.0199	0.0003	0.0211	0.0002	0.0226	0.0002	0.0255	0.0003
10	0.0149	0.0003	0.0164	0.0003	0.0184	0.0002	0.0207	0.0003	0.0239	0.0003
15	0.0144	0.0004	0.0157	0.0003	0.0179	0.0005	0.0202	0.0002	0.0235	0.0003
20	0.0141	0.0004	0.0156	0.0004	0.0178	0.0003	0.0201	0.0003	0.0234	0.0004
25	0.0141	0.0004	0.0153	0.0004	0.0177	0.0004	0.0200	0.0003	0.0233	0.0002
50	0.0137	0.0004	0.0152	0.0003	0.0176	0.0004	0.0200	0.0003	0.0234	0.0004
100	0.0139	0.0004	0.0152	0.0005	0.0177	0.0003	0.0200	0.0003	0.0236	0.0002

p	0.9		0.95		0.975		0.99		0.995	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.2207	0.0009	0.2308	0.0006	0.2368	0.0008	0.2416	0.0006	0.2441	0.0006
4	0.1028	0.0009	0.1336	0.0052	0.3020	0.0125	0.3211	0.0008	0.3241	0.0007
5	0.1014	0.0019	0.1217	0.0012	0.1347	0.0017	0.1650	0.0072	0.2372	0.0244
10	0.0799	0.0009	0.0970	0.0012	0.1149	0.0026	0.1360	0.0035	0.1560	0.0040
15	0.0805	0.0008	0.0966	0.0013	0.1135	0.0017	0.1372	0.0034	0.1558	0.0044
20	0.0810	0.0011	0.0972	0.0013	0.1140	0.0018	0.1382	0.0041	0.1564	0.0066
25	0.0817	0.0009	0.0981	0.0013	0.1151	0.0017	0.1368	0.0038	0.1564	0.0047
50	0.0840	0.0011	0.1014	0.0012	0.1184	0.0022	0.1426	0.0037	0.1611	0.0052
100	0.0853	0.0011	0.1035	0.0013	0.1209	0.0018	0.1456	0.0022	0.1609	0.0058

B.17 $G_\gamma(x; \xi, \delta)$ com $\gamma = 0$ Usando o Teste de Stephens

p	0.005		0.01		0.025		0.05		0.1	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.0344	0.0001	0.0344	0.0001	0.0345	0.0001	0.0346	0.0002	0.0352	0.0001
4	0.0246	0.0002	0.0249	0.0002	0.0258	0.0002	0.0272	0.0002	0.0302	0.0003
5	0.0202	0.0003	0.0211	0.0002	0.0228	0.0003	0.0253	0.0004	0.0293	0.0004
10	0.0165	0.0005	0.0179	0.0003	0.0204	0.0004	0.0232	0.0004	0.0270	0.0004
15	0.0159	0.0005	0.0171	0.0003	0.0199	0.0004	0.0225	0.0005	0.0264	0.0003
20	0.0154	0.0003	0.0169	0.0004	0.0195	0.0004	0.0222	0.0004	0.0261	0.0003
25	0.0154	0.0005	0.0166	0.0004	0.0194	0.0003	0.0220	0.0004	0.0259	0.0003
50	0.0149	0.0004	0.0166	0.0004	0.0191	0.0003	0.0217	0.0003	0.0256	0.0003
100	0.0147	0.0005	0.0160	0.0004	0.0188	0.0004	0.0216	0.0004	0.0256	0.0003

p	0.9		0.95		0.975		0.99		0.995	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.0924	0.0005	0.0991	0.0004	0.1051	0.0007	0.1098	0.0005	0.1115	0.0003
4	0.0920	0.0009	0.1067	0.0011	0.1215	0.0018	0.1377	0.0017	0.1467	0.0021
5	0.0940	0.0012	0.1093	0.0014	0.1247	0.0013	0.1426	0.0020	0.1575	0.0038
10	0.0951	0.0010	0.1141	0.0017	0.1325	0.0023	0.1567	0.0036	0.1764	0.0039
15	0.0956	0.0014	0.1154	0.0020	0.1340	0.0023	0.1593	0.0036	0.1776	0.0052
20	0.0961	0.0013	0.1154	0.0016	0.1353	0.0025	0.1618	0.0030	0.1813	0.0059
25	0.0961	0.0013	0.1161	0.0018	0.1358	0.0021	0.1623	0.0042	0.1817	0.0047
50	0.0967	0.0010	0.1166	0.0022	0.1379	0.0022	0.1651	0.0032	0.1860	0.0063
100	0.0966	0.0013	0.1166	0.0018	0.1370	0.0019	0.1640	0.0043	0.1860	0.0056

B.18 $G_\gamma(x; \xi, \delta)$ com $\gamma = 0.2$ Usando o Teste de Stephens

p	0.005		0.01		0.025		0.05		0.1	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.0311	0.0003	0.0320	0.0003	0.0338	0.0003	0.0345	0.0001	0.0360	0.0002
4	0.0242	0.0003	0.0245	0.0002	0.0250	0.0002	0.0259	0.0002	0.0280	0.0002
5	0.0195	0.0002	0.0198	0.0002	0.0209	0.0002	0.0225	0.0003	0.0251	0.0003
10	0.0146	0.0005	0.0158	0.0003	0.0180	0.0002	0.0200	0.0002	0.0230	0.0003
15	0.0141	0.0004	0.0153	0.0004	0.0176	0.0004	0.0197	0.0004	0.0227	0.0002
20	0.0139	0.0004	0.0151	0.0003	0.0173	0.0003	0.0195	0.0003	0.0227	0.0003
25	0.0137	0.0004	0.0150	0.0004	0.0173	0.0003	0.0195	0.0004	0.0226	0.0003
50	0.0136	0.0003	0.0149	0.0003	0.0171	0.0003	0.0194	0.0003	0.0228	0.0002
100	0.0136	0.0003	0.0148	0.0004	0.0171	0.0003	0.0195	0.0003	0.0228	0.0003

p	0.9		0.95		0.975		0.99		0.995	
n	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.	Quantil	Ampli.
3	0.2264	0.0007	0.2339	0.0006	0.2387	0.0004	0.2431	0.0006	0.2450	0.0006
4	0.1184	0.0022	0.2609	0.0167	0.3190	0.0006	0.3235	0.0006	0.3259	0.0005
5	0.1180	0.0008	0.1308	0.0011	0.1508	0.0033	0.2501	0.0200	0.3225	0.0130
10	0.0752	0.0009	0.0920	0.0011	0.1103	0.0022	0.1399	0.0044	0.1759	0.0096
15	0.0756	0.0009	0.0907	0.0012	0.1062	0.0020	0.1275	0.0026	0.1434	0.0045
20	0.0766	0.0008	0.0921	0.0014	0.1069	0.0018	0.1268	0.0031	0.1438	0.0038
25	0.0777	0.0010	0.0933	0.0012	0.1085	0.0016	0.1288	0.0025	0.1438	0.0043
50	0.0797	0.0006	0.0960	0.0010	0.1118	0.0017	0.1334	0.0031	0.1522	0.0060
100	0.0810	0.0012	0.0969	0.0014	0.1145	0.0015	0.1365	0.0024	0.1527	0.0033

Apêndice C

Bibliografia

1. Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (1973). *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York (ou National Bureau of Standards, Washington).
2. Anderson, T. W., & Darling, D. A. (1952). Asymptotic theory of certain “goodness-of-fit” criteria based on stochastic processes, *Ann. Math. Statist.* **23**, 193-212.
3. Castillo, E., & Hadi, A. S. (1997). Fitting the Generalized Pareto Distribution to Data, *J. Amer. Statist. Assoc.* **92**, 1609-1620.
4. Conover, W. J. (1998). *Practical Nonparametric Statistics*, 3rd ed., Wiley, New York.
5. Cramér, H. (1928). On the Composition of Elementary Errors, *Skandinavisk. Aktuarietidskrift* **11**, 13-74, 141-180.
6. Csörgő, S., & Faraway, J. J. (1994). The Exact and Asymptotic Distributions of Cramér-von Mises Statistics, *J. Roy. Statist. Soc.* **1**, 221-234.
7. Darling, D. A. (1955). The Cramér-Smirnov test in the parametric case, *Ann. Math. Statist.* **26**, 1-20.
8. David, H. A. (1981). *Order Statistics*, 2nd ed., Wiley, New York.
9. de Zea Bermudez, P., & Kotz, S. (2010). Parameter estimation of the generalized Pareto distribution - Part I, *J. Stat. Plan. Infer.* **140**, 1353-1373.
10. Embrechts, P., Klüppelberg, C., & Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, corr. 4th printing,, Springer, Berlin.
11. Feller, W. (1948). On the Kolmogorov-Smirnov limit theorems for empirical distributions, *Ann. Math. Statist.* **19**, 177-189.
12. Fraga Alves, M.I. (1985). *Técnicas de Simulação em Ajustamento de Modelos Extremos*, DEIOC, FCUL, Lisboa.
13. Gomes, M. I. (1982). A note on statistical choice of extremal models, *Actas IX Jornadas Mat. Hispano-Lusas, Salamanca*, vol. II, 653-655.

14. Gradshteyn, I. S., & Ryzhik, I. M. (2007). *Table of Integrals, Series, and Products*, 7th ed., Elsevier Academic Press.
15. Grimshaw, S. D. (1993). Computing maximum likelihood estimates for the generalized Pareto distribution, *Technometrics* **35**, 185-191.
16. Gnedenko, B. V. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, *Ann. Math.* **44**, 423-453.
17. Hosking, J. R. M., Wallis, J. R., & Wood, E. F. (1985). Estimation of the Generalized Extreme-Value Distribution by the Method of Probability-Weighted Moments, *Technometrics* **27**, 251-261.
18. Hosking, J. R. M., & Wallis, J. R. (1987). Parameter and quantile estimation for the generalized Pareto distribution, *Technometrics* **29**, 339-349.
19. Johnson, N. L., Kotz, S., & Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions*, vol. 1 e 2, 2nd ed., Wiley, New York.
20. Juritz, J. M., Juritz, J. W. F., & Stephens, M. A. (1983). On the Accuracy of Simulated Percentage Points, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **78**, 441-444.
21. Kolmogorov, A. N. (1933a). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie*, Ergebnisse der Mathematik. (Trad. inglesa: Kolmogorov, A. N. (1956). *Foundations of the Theory of Probability*, Chelsea, New York.)
22. Kolmogorov, A. N. (1933b). Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione, *Giorn. Inst. Ital. Attuari* **4**, 89-91.
23. Landwehr, J. M., Matalas, N. C., & Wallis, J. R. (1979). Probability weighted moments compared with some traditional techniques for estimating Gumbel parameters and quantiles, *Water Resour. Res.* **15**, 1055-1064.
24. Leadbetter, M. R., Lindgren, Georg, & Rootzen, Holger (1983). *Extremes and related properties of random sequences and processes*, Springer, New York.
25. Marsaglia, G., Tsang, W. W., & Wang, J. (2003). Evaluating Kolmogorov's Distribution, *J. Stat. Soft.* **8**, 1-4.
26. Martins, E. S., & Stedinger, J. R. (2000). Generalized maximum-likelihood generalized extreme-value quantile estimators for hydrologic data, *Water Resour. Res.* **36**, 737-744.
27. Nikitin, Y. (1995). *Asymptotic Efficiency of Nonparametric Tests*, 1st ed., Cambridge University Press.
28. Patel, J. K., Kapadia, C. H., & Owen D. B. (1976). *Handbook of Statistical Distributions*. Marcel Dekker, Ink.
29. Pestana, D. D., & Velosa, S. F. (2008). *Introdução à Probabilidade e Estatística*, vol. I, 3ª ed., Fundação Calouste Gulbenkian.
30. Reiss, R. D., & Thomas, M. (2001; 2007). *Statistical Analysis of Extreme Values, with Application to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*, 2nd ed.; 3rd ed., Birkhäuser Verlag.

31. Schafer, R. E. (1974). On assessing the precision of simulations, *J. Statist. Compt. Simul.* **3**, 67-69.
32. Siegel, S., & Castellan, N. J. (1988). *Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences*, 2nd ed., McGraw-Hill, New-York.
33. Smirnov, N. V. (1936). Sui la distribution de W_n^2 (Criterium de von Mises, R.), *Compt. Rend.* **202**, 449-452.
34. Smirnov, N. (1948). Table for Estimating the Goodness of Fit of Empirical Distributions, *Ann. Math. Statist.* **19**, 279-281.
35. Smith, J.A. (1987). Estimating tails of probability distributions, *Ann. Statist.* **15**, 1174-1207.
36. Stephens, M. A., & Maag, U. R. (1968). Further percentage points for W_n^2 , *Biometrika* **55**, 428-430.
37. Stephens, M. A. (1970). Use of Kolmogorov-Smirnov, Cramér-von Mises and related statistics without extensive tables, *J. Royal Statist. Soc.* **32**, 115-122.
38. Stephens, M. A. (1974). EDF statistics for goodness of fit and some comparisons, *J. Amer. Statist. Assoc.* **69**, 730-737.
39. von Mises, R. (1931). *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik*, Leipzig and Vienna.
40. Watson, G. N. (1966). *A treatise on the theory of Bessel functions*, 2nd ed., Cambridge University press.

